$\mathcal{D}$-modules, in memory of Emmanuel Andronikof
CIRM (Marseille) April 14–18, 1997

Organizers: A. D'Agnolo, M. Kashiwara, P. Schapira, J.-P. Schneiders

Andrei Baran: *On the coherence of direct images of $\mathcal{E}(0)$-modules*
Abstract: One proves that a microlocal version of Grauert's Direct Image Theorem holds for $\mathcal{E}(0)$-modules. Namely that, if $\mathcal{N}$ is a coherent $\mathcal{E}(0)$-module on $T^*(X \times Y)$ and if the restriction of the natural projection on $T^*(X)$ to a set depending on the support of $\mathcal{N}$ is a proper mapping, then the microlocal direct image of $\mathcal{N}$ through that projection mapping is a complex of $\mathcal{E}(0)$-modules with coherent cohomology.
The proof uses nuclearity with respect to a topological algebra and relies on computing the invariants by means of semi-simplicial systems of sheaves.

Jan-Erik Björk: *On the work of Emmanuel Andronikof*

Louis Boutet de Monvel: *Star products and Toeplitz operators*
Abstract: This is a survey talk, with more open problems than new results, on the theory of star algebras (deformation algebras) $\mathcal{E}$ over a real or complex conic Poisson manifold, and of coherent $\mathcal{E}$-modules—related to systems of pseudo-differential equations. In fact the complex case opens many new problems, about which not much is known, in contrast with the real case which has been studied for more than two decades. This is in part due to the fact that the obstruction or moduli groups that classify such objects are related to cohomology groups of holomorphic sheaves and tend to be huge.
However I believe the complex case is important for the theory of differential equations and differential geometry. For instance, one is typically confronted with the complex theory in the problem of deciding if a system of pseudodifferential (microlocal) equations is in fact equivalent to differential system.

MOS subject classification: 32Cxx, 35Sxx, 47B35, 53Cxx, 58Gxx
Keywords: Toeplitz operators, deformation algebras, star-products, $\mathcal{D}$-modules.

Jean-Paul Brasselet: *Differential operators and singular varieties*
Abstract: Les deux exposés ont consisté à donner les motivations et les idées de démonstrations des deux lemmes d'isotopie de Thom. Le schéma a été celui du programme de R. Thom "Ensembles et morphismes stratifiés" dans son fameux article au Bull. Amer. Math. Soc. de 1969, lequel a été développé et démontré dans les notes de J. Mather "Notes on topological stability", le tout aussi fameux cours de Harvard de 1970. Les améliorations ultérieures (notamment en ce qui concerne la continuité des champs controlés) ont été évoquées ainsi que les applications des deux lemmes d'isotopie : stabilité topologique (l'origine de la théorie), stabilité des applications polynomiales et le résultat de Fukuda, existence de cycles évanescents (Lê, C. Sabbah), interprétation des multiplicités polaires (Lê et B. Teissier) etc...
Une bibilographie quasi complète sur le sujet peut être constituée des bibliographies des livres de M. Goresky et R. MacPherson "Stratified Morse theory", de A. du Plessis et

T. Wall "The geometry of topological stability" ainsi que dans l'article de Lê et B. Teissier "Cycles évansescents, sections planes et conditions de Whitney. II".

Violaine Colin: *Microlocalisation du foncteur de Whitney*
Abstract: Soit X une variété analytique complexe. En s'inspirant de la construction du foncteur $\mathcal{T}\mu hom(\cdot, \mathcal{O}_X)$ [E. Andronikof, Mém. Soc. Math. France **57** (1994)], on spécialise le foncteur de Whitney [M. Kashiwara et P. Schapira, Mém. Soc. Math. France **64** (1996)] le long d'une sous-variété analytique réelle M. Le complexe de Dolbeault donne la spécialisation du foncteur de cohomologie formelle. On obtient en particulier les fonctions holomorphes dans un secteur de X de sommet M admettant un développement asymptotique le long de M. Puis en compose avec la transformation de Fourier-Sato, et en identifiant le fibré conormal à la diagonale du produit $X \times X$ au fibré cotangent de X, on obtient un nouveau foncteur que l'on notera $\cdot \overset{\mathrm{w}}{\underset{\mu}{\otimes}} \mathcal{O}_X$.

Benjamin Enriquez: *Quantum Sugawara tensor and qKZ equations*
Abstract: We present a quantum version of the construction of the KZ system of equations as a flat connection on the spaces of coinvariants of representations of tensor products of Kac-Moody algebras. We consider here representations of a tensor product of Yangian doubles and compute the coinvariants of a deformation of the subalgebra generated by the regular functions of a rational curve with marked points. We observe that Drinfeld's quantum Casimir element can be viewed as a deformation of the zero-mode of the Sugawara tensor in the Yangian double. These ingredients serve to define a compatible system of difference equations, which we identify with the quantum KZ equations introduced by I. Frenkel and N. Reshetikhin.

Joseph Fu: *Characteristic cycles of Schubert varieties*
Abstract: We present joint work with Brian Boe in which we compute explicitly the characteristic cycles associated to certain canonical sheaves on Schubert varieties X in the classical Hermitian symmetric spaces: namely the intersection homology sheaf IH_X and the constant sheaf $\mathbf{C}_X$. Our approach is to compute $CC(\mathbf{C}_X)$ by a direct geometric method, then to use the combinatorics of the Kazhdan-Lusztig polynomials, as simplified by Boe in the Hermitian symmetric space cases, to derive $CC(IH_X)$. The geometric method is based on the fundamental formula

$$CC(\mathbf{C}_X) = \lim_{r \downarrow 0} CC(\mathbf{C}_{X_r}),$$

where the $X_r \downarrow X$ constitute a family of tubes around the variety X. This formula leads at once to an expression for the coefficients of $CC(X)$ as the degrees of certain singular maps between spheres. If X is a Schubert variety in a classical Hermitian symmetric space then these degrees may be calculated recursively.

Roy Joshua: *Equivariant intersection cohomology*
Abstract: Intersection cohomology is a theory developed by Deligne, Goresky and Macpherson for studying singular spaces. The main applications of this theory are, however,

to situations involving the action of an algebraic group on an algebraic variety. Unless the group is finite it is not possible to make it act on intersection cohomology. Equivariant intersection cohomology is a variant where the group action is incorporated into the very definition. It combines many nice features of equivariant cohomology with intersection cohomology and hence is particularly suitable for many applications. In this talk we give an overview of this theory with some of the applications. We also consider connections with the theory of equivariant perverse sheaves and equivariant $\mathcal{D}$-modules.

Masaki Kashiwara: *On semisimple holonomic $\mathcal{D}$-modules*
Abstract: There is a theory of Weil sheaves of Deligne (and BBG) or a theory of mixed Hodge modules of M. Saito. In their theory, we have the following theorems.
1) Let $f : X \to Y$ be a projective morphism and F a pure perverse sheaf (in the considering category). Then $Rf_*(F)$ is a direct sum of $R^k f_*(F)[-k]$, and $R^k f_*(F)[-k]$ is pure.
2) The graduation of the vanishing (or near-by cycle) sheaf of a pure perverse sheaf with respect to the weight monodromy filtration is again pure.
3) The hard Lefschetz theorem holds for pure perverse sheaves.
etc., etc.
I conjecture that the similar results should hold by replacing "pure sheaves" with "semisimple perverse sheaves", or more generally with "semisimple holonomic D-modules".
We have now a considerable amount of evidences. One is by the theory of Tannaka category. This theory asserts that the tensor product of two semisimple holonomic lisse modules is again semisimple. The other is by works on Higgs bundle by N.J. Hitchin, C.T. Simpson, K. Corlette, and others. For example, 3) is already known for a semisimple local system on a smooth projective variety.

Yves Laurent: *Restriction to a hypersurface of the symbol of a micro-differential operator*
Abstract: From a result of Sato-Kawaï–Kashiwara we know that a differential or microdifferential operator whose principal symbol is ξ_1^m is equivalent to D_{x_1} in the framework of operators of infinite order. The main point of the proof is the resolution of a matrix equation $\partial/\partial x_1 R = AR$ with initial data 1 on $\{x_1 = 0\}$.
Results of the same kind, may be proved in the framework of microlocal or 2-microlocal operators when ξ_1^m is replaced by x_1^m. But in this case, it is not possible to find directly a solution to the matrix equation which appears that is, $\partial/\partial \xi_1 R = AR$ with initial data 1 on $\{\xi_1 = 0\}$. An alternative method is to use the previous result with a dummy variable and then eliminate it. This is done by restriction to a hypersurface of a micro-differential operator, restriction wich has a priori no meaning but may be defined after a suitable choice of the symbol.

Philippe Maisonobe: *Variétés caractéristiques de $\mathcal{D}$-modules de type $\mathcal{D}(s)f_1^{s_1}\cdots f_p^{s_p}$ et polynômes de Bernstein relatifs*
Abstract: Soit $f_1, \ldots, f_p$ p fonctions sur une variété analytique X. Dans cette conférence, nous avons rappelé comment à partir de résultats de M. Kashiwara et C. Sabbah, il est possible de déterminer la variété caractéristique de $\mathcal{D}_X(s)f_1^{s_1}\cdots f_p^{s_p}$. Nous étudions cet ensemble géomètrique contenu dans le produit du fibré cotangent à X par $\mathbf{C}^p$. Nous considérons ensuite $F_1, \ldots, F_p$ une déformation des fonctions $f_1, \ldots, f_p$ et nous montrons

que l'existence d'une équation fonctionnelle relative du type Bernstein pour $F_1^{s_1} \cdots F_p^{s_p}$ équivaut à l'existence d'une même équation pour le produit $(F_1 \ldots F_p)^s$. Nous traduisons enfin cette condition géomètriquement sur l'application $F_1 \ldots F_p$.

Corrado Marastoni: *Grassmann duality for $\mathcal{D}$-modules*
Abstract: The main results about Projective Duality, i.e. the natural incidence relation between a complex projective space and its dual (see Brylinski, D'Agnolo-Schapira, Kashiwara-Tanisaki) are generalized to the correspondence between two dual Grassmannians given by the (open) transversality relation. The main difficulty consists in the fact that, in general, the closed incidence relation, a complex hypersurface of the product, is non-smooth. Nevertheless, a geometric criterion allows us to prove an equivalence for the categories of sheaves and $\mathcal{D}$-modules on both sides; then, using the theory of Bernstein-Sato b-functions, a contact transformation is quantized in order to describe the integral transforms of $\mathcal{D}$-modules associated to holomorphic line bundles. These results appeared in C.R.A.S. Paris, t. 322 (1996) and 324 (1997).

Teresa Monteiro-Fernandes: *Formal and tempered solutions of regular $\mathcal{D}$-modules*
Abstract: Let X be a complex n-dimensional analytic manifold. Let F be an object of the derived category $D^b_{\mathbf{R}-c}(X)$, that is, a complex of $\mathbf{C}$-vector spaces with bounded and $\mathbf{R}$-constructible cohomology. We consider the object $t\mathcal{H}\mathrm{om}(F, \mathcal{O}_X)$ of $D^b(\mathcal{D}_X)$ introduced by M. Kashiwara. Here $\mathcal{O}_X$ denotes the sheaf of holomorphic functions and $\mathcal{D}_X$ the sheaf of linear holomorphic differential operators of finite order on X.
When $\mathcal{M}$ is a regular holonomic $\mathcal{D}_X$-Module, a well-known result of M. Kashiwara is the following general comparison theorem:
The natural morphism:

$$R\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, t\mathcal{H}\mathrm{om}(F, \mathcal{O}_X)) \longrightarrow R\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, R\mathcal{H}\mathrm{om}(F, \mathcal{O}_X))$$

is an isomorphism.
More recently, M. Kashiwara and P. Schapira introduced the so called Whitney functor, denoted $\cdot \overset{\mathrm{w}}{\otimes} \mathcal{O}_X$, dual of $t\mathcal{H}\mathrm{om}(\cdot, \mathcal{O}_X)$, from $D^b_{\mathbf{R}-c}(X)$ to $D^b(\mathcal{D}_X)$.
There is a transformation of functors $\cdot \otimes \mathcal{O}_X \to \overset{\mathrm{w}}{\otimes} \mathcal{O}_X$. In the case $F = \mathbf{C}_Y$ for Y an analytic submanifold, $\mathbf{C}_Y \overset{\mathrm{w}}{\otimes} \mathcal{O}_X$ is identified with the formal completion $\mathcal{O}_{X\hat{|}Y}$; when $F = \mathbf{C}_M$ for a real analytic submanifold complexified by X, $F \overset{\mathrm{w}}{\otimes} \mathcal{O}_X$ is identified to C^∞_M, the sheaf of C^∞-functions on M.
As a consequence of the duality between the two functors, these authors proved the following theorem:
Let $\mathcal{M}$ be a regular holonomic $\mathcal{D}_X$-Module. Let $F \in \mathcal{D}_{\mathbf{R}-c}(X)$. Then the natural morphism

$$R\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, F \otimes \mathcal{O}_X) \longrightarrow R\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, F \overset{\mathrm{w}}{\otimes} \mathcal{O}_X)$$

is an isomorphism.
Let now Y be a submanifold of X. Let us consider a fuchsian (not necessarily holonomic) $\mathcal{D}_X$-Module $\mathcal{M}$ along Y. In a previous work with Y. Laurent [L-TMF] we have proved that

the complexes of solutions of $\mathcal{M}$ in the sheaf of holomorphic hyperfunctions on Y, with either finite, or infinite order, are isomorphic. We have also shown that the complexes of either holomorphic solutions or formal solutions along Y are isomorphic.
Our aim here, in a first attempt, is to generalize both results of [L-TMF] replacing $\mathcal{O}_X$ by $t\mathcal{H}\mathrm{om}(F, \mathcal{O}_X)$ in the first theorem, and $\mathcal{O}_X$ by $F \overset{\mathrm{w}}{\otimes} \mathcal{O}_X$ in the second. For that purpose we shall assume that F is a bounded complex with $\mathbf{C}$-constructible cohomology.
In the next attempt, we consider the following problem: let us suppose that X is a complexification of a real analytic submanifold M in such way that Y is a complexification of a real analytic submanifold N of M. It is then natural to ask that when F is an object of $D^b_{\mathbf{R}-c}(M)$ and $\mathcal{M}$ is a fuchsian $\mathcal{D}$-Module along Y under which conditions with respect to F, the following morphisms are isomorphisms:

3) $R\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, R\Gamma_N(t\mathcal{H}\mathrm{om}(F, Db_M)) \longleftarrow R\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, t\mathcal{H}\mathrm{om}(F_N, Db_M))$

4) $R\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathbf{C}_N \otimes (F \overset{\mathrm{w}}{\otimes} C^\infty_M)) \longrightarrow R\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, F_N \overset{\mathrm{w}}{\otimes} C^\infty_M))$

When $\operatorname{codim} Y = 1$, $\mathcal{M}$ is defined by a fuchsian hyperbolic operator along N and $F = \mathbf{C}_{M\setminus N}$, we obtain both results from a classical theorem of S. Alinhac.

Philibert Nang: *Regular holonomic $\mathcal{D}$-modules related to the group of similitudes*
Abstract: In this work, we classify regular holonomic differential modules, on a complex vectoriel space of n dimension, whose characteristic variety is the union of the conormal bundles of the orbits of the group of similitudes of a non degenerate quadratic form. The study of these differential modules is done in two parts, according as the module is invariant or not under the action of the central spinor ϵ. We Show, using Cartan's theorem A and an pertubation argument, that such a differential module M is generated in a neighbourhood of the origin by a finite number of homogeneous sections (therefore globally because of the homogeneity). Restricting to a section of the projection defined by the quadratic form and taking averages, we show that when the action of ϵ is trivial, M is generated by homogeneous global sections invariant by rotation. Such invariant modules forms a full subcategory of the category we are studing. The main result is that there is an equivalence of categories between the category of these differential modules and the one's of graded modules of finite type on the algebra of invariant differential operators with polynomial coefficients. The objects of this last category are represented by finite diagrams of linear applications on vector space of finite dimension.
Finally, the non-invariant modules only exit in dimension 3, and are direct sum of a finite number of copies of a distinguished module which is described in our work.

Patrik Polo: *On the K-theory of twisted differential operators on flag varieties*
Abstract: This is joint work with Martin Holland (Invent. math. 123, 377–414). Let $\mathbf{g}$ be a semisimple Lie algebra over k, an algebraically closed field of characteristic zero, and let $\mathbf{h} \subset \mathbf{b}$ be a Cartan subalgebra inside a Borel subalgebra of $\mathbf{g}$. Let $\mathbf{U}$ be the enveloping algebra of $\mathbf{g}$. For $\mu \in \mathbf{h}^*$ let $M(\mu)$ denote the Verma module with highest weight $\mu - \rho$ and let $\mathbf{U}_\mu := \mathbf{U}/\operatorname{Ann} M(\mu)$. Let W be the Weyl group and let W_μ be the stabiliser of μ in W. We prove the following theorem, which affirms a conjecture of T.J. Hodges.
Theorem. *Let $\mu \in \mathbf{h}^*$. Then $K_0(\mathbf{U}_\mu)$ is free of rank $\#W/W_\mu$.*

Fabienne Prosmans: *Derived categories for functional analysis*
Abstract: Dans cet exposé, nous esquissons une nouvelle méthode pour étudier les propriétés homologiques de la catégorie $\mathcal{T}c$ des espaces vectoriels topologiques localement convexes. Les méthodes utilisées auparavant (p. e. par Palamodov) étaient basées sur l'algèbre homologique classique. Mais la catégorie $\mathcal{T}c$ n'étant pas abélienne, la notion usuelle de cohomologie n'est pas suffisante. Par contre, la théorie des catégories quasi-abéliennes développée par J.-P. Schneiders donne un outil mieux adapté pour traiter ces problèmes.
Nous dirons qu'un morphisme $f : E \to F$ de $\mathcal{T}c$ est *strict* s'il est relativement ouvert et qu'une suite

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

de $\mathcal{T}c$ est *strictement exacte* si $\mathrm{im} f \simeq \ker g$ et si f est strict. Notons $K(\mathcal{T}c)$ la catégorie des complexes de $\mathcal{T}c$ modulo homotopie et $N(\mathcal{T}c)$ la sous-catégorie pleine de $K(\mathcal{T}c)$ formée des complexes strictement exacts en tout degré. La théorie des catégories quasi-abéliennes montre que $N(\mathcal{T}c)$ est un système nul et on peut définir la catégorie dérivée de $\mathcal{T}c$ par

$$D(\mathcal{T}c) = K(\mathcal{T}c)/N(\mathcal{T}c).$$

De plus, la catégorie $D(\mathcal{T}c)$ est munie canoniquement de deux t-structures. Comme $\mathcal{T}c$ a assez d'injectifs, on peut dériver à droite tous les foncteurs définis sur $\mathcal{T}c$. Après une étude détaillée du foncteur lim et de son foncteur dérivé à droite, on introduit le foncteur

$$S : \mathcal{T}c \to \mathcal{P}ro(\mathcal{B}an)$$

défini par $S(E) = \text{“}\lim_{p \in P}\text{”}\, \widehat{E}_p$ où P est un système de semi-normes de E. On montre qu'il induit une équivalence de catégories

$$D^+_{cc}(\mathcal{T}c) \approx D^+(\mathcal{P}ro(\mathcal{B}an))$$

où $\mathcal{P}ro(\mathcal{B}an)$ désigne la catégorie des pro-objets de la catégorie des espaces de Banach et $D^+_{cc}(\mathcal{T}c)$ est la sous-catégorie pleine de $D^+(\mathcal{T}c)$ formée des complexes cohomologiquement complets. Un objet E de $\mathcal{T}c$ étant cohomologiquement complet si

$$E \simeq R \lim_{p \in P} \widehat{E}_p.$$

Comme corollaire, on obtient l'équivalence de catégories

$$D^+(\mathcal{F}r) \approx D^+(\mathcal{P}ro_{\mathbb{N}}(\mathcal{B}an))$$

où $\mathcal{F}r$ désigne la catégorie des espaces de Fréchet et $\mathcal{P}ro_{\mathbb{N}}(\mathcal{B}an)$ est la catégorie des pro-objets dénombrables de la catégorie des espaces de Banach.

Claude Sabbah: *Variétés de Frobenius: déformations isomonodromiques et applications des périodes infinitésimale*

Abstract: Une structure de Frobenius sur une variété analytique complexe M consiste en la donnée d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée g et d'un produit $\star$ associatif, commutatif, à unité, sur le fibré tangent TM, soumis à plusieurs conditions, notamment g est plate et l'opération de multiplication par tout champ de vecteur holomorphe est horizontale relativement à la connexion plate sans torsion $\bigtriangledown$ associée à g.
B. Dubrovin a analysé en détail de telles structures, faisant le lien avec l'existence de solutions des équations dites WDVV.
Des exemples de telles structures apparaissent déjà dans les travaux de K. Saito sur les déploiements de singularités et l'application de périodes associée.
Nous nous proposons dans cet exposer de chausser les lunettes de K. Saito pour lire quelques résultats de Dubrovin.
Une façon commode d'exprimer la compatibilité de la connexion "métrique" $\bigtriangledown$ (ici nous faisons l'abus d'appeler g une métrique) avec le produit $\star$ consiste à construire sur le fibré image inverse π^*TM sur $\mathbf{P}^1 \times M$ une connexion *méromorphe* ∇, dont les pôles sont situés seulement le long des sections $\{0\} \times M$ et $\{\infty\} \times M$, avec des conditions sur le type de singularité le long de ces sections; la compatibilité cherchée se traduit alors par la condition d'intégrabilité de cette nouvelle connexion.
Nous proposons une méthode pour détecter une structure de Frobenius sur une variété M. Elle se décompose en plusieurs étapes.

(1) Construire sur $\mathbf{A}^1 \times M$, produit de la droite affine de coordonnée z avec M, un fibré F de rang $\dim M$, muni d'une connexion méromorphe intégrable ∇ à pôles le long de $\{z = 0\} \times M$ et d'une forme bilinéaire G symétrique (en fait la forme est à valeur dans $z^m \mathcal{O}_M[z]$ pour un $m \in \mathbf{Z}$ convenable, et elle doit être $(-1)^m$ hermitienne relativement à l'involution qui change z en $-z$) non dégénérée qui est ∇-horizontale.
Ce fibré à connexion peut par exemple se construire à partir du fibré de Gauss-Manin associé à une fonction holomorphe sur une variété. Il peut aussi se construire dans certains cas par déformation isomonodromique (ou mieux, isoformelle) à partir d'une donnée initiale (F^o, ∇^o) sur $\mathbf{A}^1$.

(2) Montrer qu'on peut prolonger ce fibré et sa connexion à $\mathbf{P}^1 \times M$ en un fibré $(\widetilde{F}, \widetilde{\nabla})$, de sorte que
(a) la connexion soit à pôles logarithmiques le long de $\{z = \infty\} \times M$,
(b) le fibré $\widetilde{F}$ soit isomorphe à l'image inverse d'un fibré E sur M, à savoir nécessairement $E = F_{|\{0\}\times M}$, autrement dit $\widetilde{F}$ est trivial dans les fibres de $\pi : \mathbf{P}^1 \times M \to M$.

Lorsqu'on restreint la situation au-dessus d'un point de M, prolonger (F^o, ∇^o) à $(\widetilde{F}^o, \widetilde{\nabla}^o)$ s'appelle classiquement la *mise sous forme normale de Birkhoff* de la connexion. C'est un analogue, dans le cas de singularités éventuellement irrégulières, du problème de Riemann-Hilbert (dans les situations considérées dans ces notes, on passe de l'un à l'autre par transformation de Fourier-Laplace). La deuxième étape consiste donc à résoudre le problème de Birkhoff *en famille*, la variété M jouant maintenant le rôle d'un espace de paramètres. Il se trouve que la résolution du problème pour une valeur du paramètre donne aussi une solution pour la famille, au-moins au voisinage de cette valeur du paramètre: c'est le contenu d'un théorème de Malgrange.

Pour la deuxième étape, il s'agit donc de résoudre le problème de Birkhoff pour une valeur du paramètre. Dans le cas des déformations isomonodromiques, on se donne un fibré à connexion (F^o, ∇^o) sous forme de Birkhoff, donc il n'y a rien à faire. Pour les systèmes de Gauss-Manin, la résolution repose sur une méthode due à M. Saito, qui utilise notamment la théorie de Hodge.
Si l'on a obtenu un tel prolongement $(\widetilde{F}, \widetilde{\nabla})$, on a une identification entre les fibrés $\widetilde{F}_{|\{\infty\}\times M}$ et $E = \widetilde{F}_{|\{0\}\times M}$. Le premier porte naturellement une connexion plate $\triangledown$ et un endomorphisme $\triangledown$-horizontal R_∞ (résidu de la connexion ∇) et le second un endomorphisme R_0 et une 1-forme Φ à valeur dans $\mathrm{End}(E)$. On transporte $\triangledown$ et R_∞ à E *via* l'identification ci-dessus, et ces différents objets satisfont des relations de compatibilité.
De plus, la forme G induit sur E une forme bilinéaire g qui est $\triangledown$-horizontale (dans le cas des systèmes de Gauss-Manin, cette forme s'obtient à l'aide du résidu de Grothendieck).

(3) Identifier le fibré E au fibré tangent TM.
Il faut noter que si l'on a une structure de Frobenius sur M, le fibré tangent TM admet une section holomorphe particulière, notée e, qui est dans chaque fibre l'unité du produit $\star$, et une des conditions de compatibilité de g et $\star$ exprime que cette section est $\triangledown$-horizontale. S'il y a une identification $E \simeq TM$, il doit donc exister une section $\triangledown$-horizontale particulière ω de E qui correspond à e.
Soit alors ω une section $\triangledown$-horizontale de E. Celle-ci définit une *application de périodes infinitésimale*

$$TM \xrightarrow{\varphi_\omega} E, \quad \xi \mapsto -\Phi(\xi)(\omega)$$

pour tout champ de vecteur ξ sur M. La section ω est dite *primitive* si φ_ω est un isomorphisme de fibrés.
Si on a trouvé une section primitive ω de E on peut transporter par φ_ω sur TM les objets définis sur E: nous montrons qu'on obtient ainsi une structure de Frobenius sur M.

Nous illustrons cette méthode par deux exemples:

(1) la déformation universelle d'une connexion sur un fibré F^o sur la droite affine $\mathbf{A}^1$, sous forme normale de Birkhoff: dans une base convenable de F^o la matrice de la connexion prend la forme

$$\left(\frac{B_0^o}{z} + B_\infty\right)\frac{dz}{z}$$

où B_0^o et B_∞ sont deux matrices de $M_d(\mathbf{C})$;

(2) les systèmes de Gauss-Manin pour des polynômes $p : \mathbf{C}^{n+1} \to \mathbf{C}$ dont tous les points critiques sont isolés et qui vérifient une condition de modération à l'infini; c'est une extension dans le cas global des théorèmes de K. Saito et M. Saito. Ici, la variété de Frobenius est un voisinage de l'origine dans l'espace vectoriel $\mathbf{C}[z_0, \dots, z_n]/(\frac{\partial p}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial p}{\partial z_n})$, qui est par hypothèse de dimension finie.

Le contenu de cet exposé consiste surtout en une mise au point et une reformulation de résultats (bien) connus: la présentation de la première partie est essentiellement due a B. Malgrange après les travaux de M. Jimbo, T. Miwa et K. Ueno; elle a aussi été inspirée

par la lecture des notes de Dubrovin au vu de l'approche qu'en donne N. Hitchin; la notion de structure de Saito et la définition de l'application de périodes infinitésimale sont une reformulation d'une partie de l'article de K. Saito; enfin, la notion de variété de Frobenius a été mise en évidence par B. Dubrovin, où l'on trouvera une liste très complète de références. Je remercie Michèle Audin pour les nombreuses discussions sur ce sujet, qui m'ont permis de préciser certains points, ainsi que pour m'avoir donné l'occasion de faire le point sur cette question. Je remercie aussi John Harnad pour ses remarques.
(Article à paraître dans Expositiones Mathematicae en 1998)

Kiyoshi Takeuchi: *Some applications of bimicrolocalization theory*
Abstract: By considering a double normal deformation associated to sequences of manifolds, we introduce some new functors. This theory not only reconstructs the second microlocalization of Kashiwara and Kataoka-Tose, but also enables us to introduce several sheaves suitable for the study of higher-codimensional boundary value problems. Getting these tools at hand, we obtain various extension theorems for the solutions to non-elliptic D-modules, which generalize the theory due to Kashiwara-Kawai on elliptic cases. We also explain a result on the solvability of D-modules with multiple characteristics.

Susumu Tanabe: *Polar structure of Gauss-Manin system associated with complete intersection isolated singularities*
Abstract: The Mellin transform of the fibre integrals for certain space curve singularities are calculated. We treat mainly quasihomogeneous isolated complete intersection singularities. Most important examples that illustrate our theory are simple singularities of the list of M. Giusti. One can discover symmetry between the spectra of Gauss-Manin systems defined as differential equations for fibre integrals. Structure of lattice of poles of Mellin transforms is clarified i.e. it can be expressed by means of topological invariants of the singularities treated.

Toshiyuki Tanisaki: *Radon transforms for Hermitian symmetric spaces*
Abstract: Let G be a simple complex algebraic group and let P and Q be parabolic subgroups of G. We have a functor R from the category of $\mathcal{D}_{G/P}$-modules to that of $\mathcal{D}_{G/Q}$-modules, called the Radon transform. When Q and P satisfy certain conditions and L is a certain invertible $\mathcal{O}_{G/P}$-module, we obtain an explicit description of $R(\mathcal{D}_{G/Q} \otimes_{\mathcal{O}_{G/P}} L)$.

Francesco Tonin: *Microlocal tempered inverse image and Cauchy problem*
Abstract: We prove an inverse image formula for the functor $\mathcal{T}\mu\mathrm{hom}(\cdot, \mathcal{O})$ of Andronikof, that is, the microlocalization of the functor $\mathcal{T}hom(\cdot, \mathcal{O})$ of tempered cohomology introduced by Kashiwara. As an application, following an approach initiated by D'Agnolo and Schapira, we study the tempered ramified linear Cauchy problem. We deal with ramifications of logarithmic type, or along a swallow's tail subvariety, or at the boundary of the data existence domain.

Nobuyuki Tose: *An influence domain for microdifferential operators with double involutive characteristics*

Abstract: Let M be a real analytic manifold with a complexification X, and P be a microdifferential operator defined in a neighborhood of $q_0 \in T^*_M X \setminus M$. We assume that the principal symbol p of P can be factorized into the form $p = p_0 p_1 p_2$ by homogeneous holomorphic functions p_0, p_1 and p_2. Moreover we assume the conditions $p_0(q_0) \neq 0$, $p_1(q_0) = p_2(q_0) = 0$, $dp_1 \wedge dp_2 \wedge \omega_M \neq 0$ at q_0, $\{p_1, p_2\} = 0$ if $p_1 = p_2 = 0$, and p_1 and p_2 are real valued on $T^*_M X$. We define a regular involutive manifold V in $T^*_M X$ by $V = \{p_1 = p_2 = 0\}$, and Γ denotes the leaf of V passing through q_0. We define "rectangles" on Γ with the aid of the two flows H_{p_1} and H_{p_2}. Then we show,for a "rectangle" K with q_0 as a vertex, that the other three vertices form a microlocal dependence domain for q_0 with respect P.

Eric Vasserot: *Double-loop algebras and the Fock space*

Abstract: The Fermionic Fock space may be viewed as a level 1 integrable module over the affine Lie algebra of type $A_n^{(1)}$. It can be constructed either geometrically via Borel-Weil theory of loop groups, either algebraically via 'infinite wedges'. Recently it has been noticed by physicists that the Fock space has another type of symmetry: a Yangian action. In the quantum setting these 2 actions glue together to form a representation of a toroidal quantum group. The toroidal quantum group of type A_n is the Schur dual of Cherednik algebra. It has been recently introduced and is linked with a conjectural Langlands correspondence on algebraic surfaces.

Michèle Vergne: *Number of integer points in convex polyhedra*

Abstract: Soit P un polytope convexe rationnel dans $\mathbf{R}^n$. On donne des formules explicites pour l'intégrale de l'exponentielle e^f d'une forme linéaire générique f sur P en fonctions des cônes tangents aux sommets du polytope. Une formule similaire existe pour la somme des valeurs de e^f aux points entiers contenus dans P. Ces formules sont inspirées par les formules de points fixes d'Atiyah-Bott, pour les variétés toriques, mais on en donne une démonstration élémentaire. On en déduit une formule pour le nombre de points entiers dans P en fonction du volume de P et des volumes des faces de P. Ces résultats sont obtenus en commun avec M. Brion (J.A.M.S, 1997, 10, pages 797-833). Par exemple le nombre de solutions x, y, z entières positives de l'équation $6x + 10y + 15z = n$ est une fonction de n de la forme $\frac{1}{6\times 10\times 15}\frac{n^2}{2} + a(n)n + b(n)$ où les fonctions $a(n)$ et $b(n)$ sont des fonctions périodiques de n mod 30 explicites.

Amnon Yekutieli: *Intersection cohomology $\mathcal{D}$-module and algebraic residues*

Abstract: Suppose X is a variety over a field k of characteristic 0, embedded in a smooth variety Y. According to Brylinski-Kashiwara there is a unique simple $\mathcal{D}_Y$-module $\mathcal{L}(X, Y) \subset \mathcal{H}^d_X \mathcal{O}_Y$, where $d = \operatorname{codim}(X, Y)$. If $k = \mathbf{C}$ then the de Rham complex $\mathrm{DR}\,\mathcal{L}(X, Y)$ is the intersection cohomology sheaf of X. Vilonen found a complex-analytic description of $\mathcal{L}(X, Y)$ when X is a locally complete intersection with isolated singularities. The explicit construction of Grothendieck's residue complex allows a description of $\mathcal{L}(X, Y)$ in terms of algebraic residues, when X is a curve. An outline of the proof of this result is given. For the case $\dim X > 1$ we have a conjectured formula.

Giuseppe Zampieri: *Analytic discs in symplectic spaces*