ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

MOHAMMED BENCHAOU
ANDRÉ MARTINEZ

# Estimations exponentielles en théorie de la diffusion pour des opérateurs de Schrödinger matriciels

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 71, nº 6 (1999), p. 561-594
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1999__71_6_561_0>

*Ann. Inst. Henri Poincaré,*
Vol. 71, n° 6, 1999, p. 561-594. *Physique théorique*

# Estimations exponentielles en théorie de la diffusion pour des opérateurs de Schrödinger matriciels

par

**Mohammed BENCHAOU**[a, 1], **André MARTINEZ**[b, 2]
[a] Université Paris-Nord, Département de Mathématiques, Av. J.-B. Clément, 93430 Villetaneuse, France
[b] Università di Bologna, Dipartimento di Matematica, Piazza di porta San Donato 5, 40127 Bologna, Italie

Article received on 4 January 1999

ABSTRACT. – In relation with the Born–Oppenheimer approximation, we study the scattering operator $S$ associated to a $2 \times 2$ semiclassical matricial Schrödinger operator, near a non-trapping energy level. Under some gap condition and assumptions of analyticity and decay at infinity, we show that the two off-diagonal elements of $S$ are exponentially small as the semiclassical parameter tends to zero. Moreover, the rate of exponential decay can be explicited depending on the behaviour in the complex domain of the two electronic levels. © Elsevier, Paris

RÉSUMÉ. – En relation avec l'approximation de Born–Oppenheimer, on étudie l'opérateur de diffusion $S$ associé à un opérateur de Schrödinger matriciel $2 \times 2$, près d'un niveau d'énergie non-captif. Sous une condition de gap et des hypothèses d'analyticité et de décroissance à l'infini, on montre que les deux éléments non-diagonaux de $S$ deviennent exponentiellement petits lorsque le paramètre semiclassique tend vers zéro. De plus, le taux de décroissance peut être explicité en fonction

[1] Décédé le 5 décembre 1996 à Paris. Voir Note.
[2] Investigation supported by University of Bologna. Funds for selected research topics.

du comportement dans le complexe des deux niveaux électroniques.


## 1. INTRODUCTION

L'approximation de Born–Oppenheimer permet de réduire l'étude spectrale des systèmes moléculaires à noyaux lourds à celle d'opérateurs de Schrödinger matriciels généralisés du type :

$$H_N = -h^2\Delta_x \mathbf{I}_N + \mathbf{V}(x) + hR_\tau(x, hD_x)$$

où $h^2$ désigne le rapport de masse entre les électrons et les noyaux, $\mathbf{I}_N$ la matrice identité de $\mathbf{C}^N$ ($N$ dépendant du niveau d'énergie $\tau$ étudié), $x$ la variable de position relative des noyaux, $\mathbf{V}(x)$ est une matrice symétrique $N \times N$, et $R_\tau(x, hD_x)$ est un opérateur matriciel $h$-pseudodifférentiel d'ordre 0 et de degré 1 : voir par exemple [10] et les références qui y sont données. D'autre part, il apparaît que l'étude de la diffusion de telles molécules peut également, dans certains cas, se ramener à celle de la diffusion associée à l'opérateur $H_N$ précédent : il est prouvé dans [8] et [9] que ceci est notamment le cas lorsque $N = 1$ et que l'on s'intéresse à un niveau d'énergie de diffusion non-captif pour le système classique sous-jacent. En fait, lorsque $N \geqslant 2$ on peut vérifier que les méthodes de [8] se généralisent si l'on suppose en plus que les niveaux électroniques intervenant dans $H_N$ ne se croisent pas : la condition de non-capture doit alors être faite relativement aux $N$ systèmes classiques sous-jacents (à ce propos, voir par exemple [5]). C'est dans cette optique que l'on s'intéresse ici à la théorie de la diffusion associée à l'opérateur de Schrödinger matriciel $2 \times 2$ :

$$P = \begin{pmatrix} -h^2\Delta + V_1(x) & hR(x, hD_x) \\ hR(x, hD_x)^* & -h^2\Delta + V_2(x) \end{pmatrix}$$

où $V_1$ et $V_2$ sont supposés ne jamais se rencontrer sur $\mathbf{R}^n$ (i.e. $V_1(x) \neq V_2(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n$), et lorsqu'on se place près d'un niveau d'énergie $\tau_0$ non-captif pour les deux hamiltoniens classiques $p_j(x, \xi) = \xi^2 + V_j(x)$, $j = 1, 2$. Sous des hypothèses convenables de comportement à l'infini, l'opérateur de diffusion $S$ associé à $P$ peut être défini, et est lui-même un opérateur matriciel du type :

$$S = \begin{pmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} \\ S_{2,1} & S_{2,2} \end{pmatrix}$$

où les $S_{j,k}$ sont des opérateurs bornés sur $L^2(\mathbf{R}^n)$. Le but de notre travail est alors d'obtenir des estimations lorsque $h \to 0_+$ sur les éléments non-diagonaux $S_{1,2}$ et $S_{2,1}$.

Il suffit de dessiner une figure dans l'espace des phases pour se convaincre qu'il s'agit en fait là d'un cas d'effet tunnel microlocal : les deux variétés caractéristiques $\{p_1(x,\xi) = \tau_0\}$ et $\{p_2(x,\xi) = \tau_0\}$ ont une intersection vide, et d'une certaine manière $S_{1,2}$ et $S_{2,1}$ représentent des quantités liées à la possible transition des électrons au cours du temps entre ces deux variétés. Dès lors, on s'attend à ce que $S_{1,2}$ et $S_{2,1}$ soient exponentiellement petits lorsque $h$ tend vers 0, avec un taux de décroissance d'autant plus grand que les deux variétés caractéristiques sont éloignées l'une de l'autre.

Une méthode raisonnable pour démontrer ce type de résultat semble être d'utiliser les estimations microlocales à poids exponentiel introduites dans [11] (voir aussi [16]), qui ont par ailleurs conduit à des résultats similaires dans le cas d'hamiltoniens dépendants du temps : voir [12, 1] et [7]. Par rapport à ces travaux, on rencontre cependant ici une difficulté supplémentaire considérable : la décroissance en temps n'est plus acquise dans l'hamiltonien lui-même (puisqu'il est indépendant du temps), et ne peut être obtenue qu'à travers le flot quantique. Ceci conduit inévitablement à une certaine perte, qui provient principalement du fait que si $f$ est une fonction de troncature en énergie supportée près de $\tau_0$, alors pour tout $s \geqslant 0$ on a (cf. par exemple [21,6] ou [4]) :

$$\left\| \langle x \rangle^{-s} f(P) e^{itP/h} \langle x \rangle^{-s} \right\| = \mathcal{O}\left( \langle t \rangle^{-s} \right)$$

c'est à dire que, d'une certaine manière, il faut deux facteurs de décroissance spatiale en $\langle x \rangle^{-s}$ pour obtenir un seul facteur de décroissance temporelle en $\langle t \rangle^{-s}$ (ici on a noté $\langle u \rangle = (1 + u^2)^{1/2}$). Pour cette raison, le schema itératif suivi dans [12,1] et [7] devra dans notre cas s'arrêter lorsqu'on aura ainsi épuisé la décroissance spatiale fournie par les coefficients de $P$. De ce fait, le taux de décroissance exponentielle que l'on obtient dépend de manière essentielle de cette décroissance spatiale : si les coefficients de $P$ décroissent comme $\langle x \rangle^{-\rho}$ à l'infini (avec $\rho > 1$), notre résultat affirme essentiellement que pour tout $s > 1$ assez grand (explicitement en fonction de $\rho$) et pour tout $\varepsilon > 0$ on a :

$$\left\| \langle x\rangle^{-s} \begin{pmatrix} 0 & S_{1,2} \\ S_{2,1} & 0 \end{pmatrix} f(P_0)\langle x\rangle^{-s} \right\| = \mathcal{O}\left(e^{-(\Sigma(\rho)-\varepsilon)/h}\right)$$

uniformément par rapport à $h > 0$ assez petit. Ici, $P_0$ est l'opérateur libre de référence, $f$ tronque près d'un niveau non-captif, et $\Sigma(\rho)$ est une constante positive explicitement déterminée à partir de $\rho$ et du comportement dans le complexe de $V_1$ et $V_2$ (voir le Théorème 2.1 pour plus de détails). Notons qu'un résultat similaire a été annoncé dans [17], mais avec des hypothèses de décroissance sur $V$ plus fortes que les notres (hypothèses qui devraient effectivement permettre de se passer des facteurs en $\langle x\rangle^{-s}$ dans l'estimation precedente).

Pour simplifier un peu la lecture, on a choisi d'adopter ici le plus possible la présentation déjà suivie dans [12] et [1]. En particulier, les titres des sections sont volontairement très similaires à ceux de [1] (à part les Sections 5 et 6 qui sont particulières au problème qui nous occupe ici). Cependant, si le schéma général de la preuve reste le même, en revanche les détails en sont fondamentalement différents précisément à cause de la constante necessité que l'on a ici de traduire les décroissances spatiales en décroissances temporelles.

**Note.** Cet article constitue l'achèvement d'un travail commencé par M. Benchaou alors qu'il préparait sa thèse de Doctorat à l'Université Paris-Nord. C'est sa tragique disparition, survenue à la suite de l'attentat de la gare de Port-Royal à Paris du 3 décembre 1996, qui l'a empêché de mener cette étude jusqu'à son terme.

## 2. HYPOTHÈSES ET RÉSULTAT PRINCIPAL

On s'intéresse à la théorie de la diffusion dans $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R}^n) \oplus L^2(\mathbf{R}^n)$ pour l'opérateur :

$$P = \begin{pmatrix} -h^2\Delta + V_1(x) & hR(x,hD_x) \\ hR(x,hD_x)^* & -h^2\Delta + V_2(x) \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

où $R(x,hD_x) = \sum_{|\alpha|\leqslant 1} c_\alpha(x)(hD_x)^\alpha$ est un opérateur différentiel de degré 1, et $V_1$, $V_2$ et $c_\alpha$ ($|\alpha| \leqslant 1$) sont des fonctions analytiques réelles sur $\mathbf{R}^n$, qui admettent des prolongements holomorphes dans une bande complexe

$$S_a = \{z \in \mathbf{C}^n;\ |\mathrm{Im}\, z| < a\} \tag{2.2}$$

et vérifient :

$$\begin{aligned} &\left|V_j(z) - l_j\right| + \left|c_\alpha(z)\right| = \mathcal{O}(|z|^{-\rho}) \\ &\qquad \text{lorsque } |z| \to \infty,\ z \in S_a\ (j = 1, 2) \end{aligned} \tag{2.3}$$

avec $l_1, l_2 \in \mathbf{R}$ et $\rho > 1$.

Si l'on note

$$P_0 = \begin{pmatrix} -h^2\Delta + l_1 & 0 \\ 0 & -h^2\Delta + l_2 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

on peut alors montrer comme dans le cas scalaire l'existence et la complétude asymptotique des opérateurs d'onde :

$$W_\pm = \mathrm{s} - \lim_{t \to \pm\infty} e^{itP} e^{-itP_0} \tag{2.5}$$

et on définit l'opérateur de diffusion :

$$S = W_+^* W_- \tag{2.6}$$

qui est un opérateur unitaire sur $\mathcal{H}$, et peut s'écrire sous la forme :

$$S = \begin{pmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} \\ S_{2,1} & S_{2,2} \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

où les $S_{j,k}$ sont des opérateurs bornés sur $L^2(\mathbf{R}^n)$.

Dans ce travail, on cherche à obtenir des estimations sur certaines normes de $S_{1,2}$ et $S_{2,1}$, en précisant leur comportement lorsque le paramètre semi-classique $h > 0$ tend vers 0. L'hypothèse géométrique essentielle que l'on fait est la suivante (hypothèse de séparation) :

$$\Gamma_0 := \inf_{x \in \mathbf{R}^n} V_1(x) - \sup_{x \in \mathbf{R}^n} V_2(x) > 0. \tag{2.8}$$

Notons qu'il s'agit là d'une hypothèse plus forte que l'hypothèse de gap habituelle. Voir néanmoins la Section 11 concernant le cas où l'on suppose seulement que $\inf(V_1 - V_2) > 0$.

D'autre part, on va se contenter de travailler près d'une énergie de diffusion non-captive dans le sens suivant : on se donne un réel $\tau_0$ vérifiant :

$$\tau_0 > \inf_{x \in \mathbf{R}^n} V_1(x) \tag{2.9}$$

et, notant $p_j(x, \xi) = \xi^2 + V_j(x)$ $(j = 1, 2)$, on suppose que pour tout $(x, \xi) \in \mathbf{R}^{2n}$ vérifiant $p_j(x, \xi) = \tau_0$, on a :

$$\left| \exp t H_{p_j}(x, \xi) \right| \to \infty \quad (|t| \to \infty;\ j = 1, 2). \tag{2.10}$$

Ici,

$$H_{p_j} = \frac{\partial p_j}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial p_j}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi}$$

désigne le champ Hamiltonien associé à $p_j$.

Pour $\lambda \in ]\sup_{\mathbf{R}^n} V_2, \inf_{\mathbf{R}^n} V_1[$, on définit :

$$\kappa(\lambda) = \sup \left\{ \kappa \in ]0, a[;\ \inf_{|\mathrm{Im} z| < \kappa} \left| (\lambda - V_1(z))(\lambda - V_2(z)) \right| > 0 \right\} \tag{2.11}$$

et il est facile de voir que la condition de séparation (2.8) entraîne que $\kappa(\lambda) > 0$ sur $]\sup_{\mathbf{R}^n} V_2, \inf_{\mathbf{R}^n} V_1[$. On pose :

$$\Sigma_0 = \int_{\sup V_2}^{\inf V_1} \frac{\kappa(\lambda)}{2\sqrt{\tau_0 - \lambda}} d\lambda \tag{2.12}$$

qui est donc une constante strictement positive, et pour $\rho > 1$ on définit :

$$N(\rho) = \begin{cases} 2 & \text{si } 1 < \rho \leqslant 5/2; \\ \mathrm{Max}\{j \in \mathbf{N};\ j < \rho + \frac{1}{2}\} & \text{si } \rho > 5/2 \end{cases} \tag{2.13}$$

ainsi que

$$\Sigma(\rho) = \left( 1 - \frac{1}{2^{N(\rho)-1}} \right) \Sigma_0. \tag{2.14}$$

Notant aussi $\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}$ pour $x \in \mathbf{R}^n$, notre résultat est alors :

THEORÈME 2.1. – *On suppose* (2.3), (2.8), (2.9) *et* (2.10). *Alors, pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $\delta > 0$ *tel que, pour toute fonction* $f \in C_0^\infty(]\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta[)$ *et pour tout* $s > N(\rho)/2$, *on a* :

$$\left\| \langle x\rangle^{-s} \begin{pmatrix} 0 & S_{1,2} \\ S_{2,1} & 0 \end{pmatrix} f(P_0)\langle x\rangle^{-s} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \mathcal{O}\left(e^{-(\Sigma(\rho)-\varepsilon)/h}\right) \tag{2.15}$$

*uniformément par rapport à $h > 0$ assez petit.*

Puisque $\Sigma(\rho) \to \Sigma_0$ lorsque $\rho \to +\infty$, on déduit en particulier de ce théorème :

COROLLAIRE 2.1. – *Si de plus* (2.3) *est vraie pour tout $\rho > 1$, alors pour tout $\mathcal{W} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute fonction $f \in C_0^\infty(]\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta[)$ on a :*

$$\left\| \mathcal{W}(x) \begin{pmatrix} 0 & S_{1,2} \\ S_{2,1} & 0 \end{pmatrix} f(P_0)\mathcal{W}(x) \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \mathcal{O}\left(e^{-(\Sigma_0-\varepsilon)/h}\right) \tag{2.16}$$

*uniformément par rapport à $h > 0$ assez petit.*

## 3. RÉDUCTION DU PROBLÈME

On peut supposer sans perte de généralité que $1 < s < \rho$ dans le cas où $\rho \leqslant 5/2$, et

$$\frac{N(\rho)}{2} < s < \rho + \frac{1}{2} - \frac{N(\rho)}{2}$$

dans le cas où $\rho > 5/2$. Du fait que $f(P_0)$ se représente par une matrice diagonale sur $L^2(\mathbf{R}^n) \oplus L^2(\mathbf{R}^n)$, et qu'il commute avec $S$, il s'agit en fait (quitte à remplacer $f$ par $f^2$, ce qui est rendu possible par le fait que $\langle x\rangle^s f(P_0)\langle x\rangle^{-s}$ est uniformément borné) d'estimer les quantités :

$$A(\varphi_0^-, \varphi_0^+) = \left\langle Sf(P_0)\langle x\rangle^{-s} \begin{pmatrix} \varphi_0^- \\ 0 \end{pmatrix}, \ f(P_0)\langle x\rangle^{-s} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_0^+ \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}} \tag{3.1}$$

et

$$A'(\varphi_0^-, \varphi_0^+) = \left\langle Sf(P_0)\langle x\rangle^{-s} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_0^- \end{pmatrix}, \ f(P_0)\langle x\rangle^{-s} \begin{pmatrix} \varphi_0^+ \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}} \tag{3.2}$$

uniformément par rapport à $h$ et par rapport à $\varphi_0^\pm \in L^2(\mathbf{R}^n)$ vérifiant $\|\varphi_0^\pm\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = 1$. Par densité, on peut même en fait supposer que $\varphi_0^\pm \in H^2(\mathbf{R}^n)$.

On va se contenter d'écrire la preuve pour $A(\varphi_0^-, \varphi_0^+)$, celle pour $A'(\varphi_0^-, \varphi_0^+)$ étant similaire. Remarquons d'abord que pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a :

$$\begin{aligned} A(\varphi_0^-, \varphi_0^+) &= \left\langle W_- f(P_0)\langle x\rangle^{-s} \begin{pmatrix} \varphi_0^- \\ 0 \end{pmatrix}, \; W_+ f(P_0)\langle x\rangle^{-s} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_0^+ \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle \varphi^-(t), \varphi^+(t) \rangle_{\mathcal{H}} \end{aligned} \tag{3.3}$$

avec :

$$\begin{aligned} \varphi^-(t) &= e^{itP/h} W_- f(P_0)\langle x\rangle^{-s} \begin{pmatrix} \varphi_0^- \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \varphi^+(t) &= e^{itP/h} W_+ f(P_0)\langle x\rangle^{-s} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_0^+ \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

En particulier, $\varphi^\pm(t) = \varphi^\pm(t, x; h) \in C^1(\mathbf{R}; L^2(\mathbf{R}^n)) \cap C^0(\mathbf{R}; H^2(\mathbf{R}^n))$ et sont solutions de

$$(hD_t - P)\varphi^\pm = 0. \tag{3.5}$$

De plus, si pour $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ on note

$$\Pi_j \psi = \psi_j, \tag{3.6}$$

il est facile de voir en utilisant (2.5) que l'on a par construction :

$$\|\Pi_2 \varphi^-(t)\| \to 0 \quad (t \to +\infty) \tag{3.7}$$

et

$$\|\Pi_1 \varphi^+(t)\| \to 0 \quad (t \to -\infty). \tag{3.8}$$

L'idée de la preuve sera d'exploiter (3.5) associé aux conditions (3.7) et (3.8), pour en déduire des propriétés de localisation microlocale de $\varphi^-(t)$ et $\varphi^+(t)$ par rapport aux variables $(t, x)$. De ces propriétés, il s'en suivra que $\varphi^-(t)$ et $\varphi^+(t)$ ne vivent pas dans les mêmes régions de l'espace des phases de $\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n$ (ou plutôt de l'espace $T^*\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_\xi^n$, où $T^*\mathbf{R}_t$ désigne le cotangent de $\mathbf{R}_t$ et $\xi$ la variable duale de $x$), ce qui entraînera que leur produit scalaire est exponentiellement petit. Signalons qu'un tel procédé a déjà été employé dans [12] pour l'étude de certaines probabilités de transition en théorie adiabatique, puis dans [1] pour l'étude de l'opérateur de diffusion associé à un opérateur de Klein–Gordon matriciel.

## 4. MICROLOCALISATION

Soit $\mu > 0$ (que l'on fixera ensuite assez petit). Pour $u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n)$, $(t, \tau, \xi) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ et $h > 0$, on pose :

$$Gu(t,\tau,\xi;h) = \frac{(2\mu)^{\frac{1}{4}}}{(2\pi h)^{\frac{n}{2}+\frac{3}{4}}} \int\limits_{\mathbf{R}_{t'} \times \mathbf{R}_x^n} e^{i(t-t')\tau/h-\mu(t-t')^2/2h-ix\xi/h} u(t',x)\,dt'\,dx. \tag{4.1}$$

Il s'agit donc en fait de la transformée de Fourier de $u$ par rapport à $x$, composée par une transformation de F.B.I. par rapport à $t$ (on renvoie à [20] pour plus de détails concernant les transformations de F.B.I.). D'autre part, le coefficient qui précède l'intégrale a été calculé de telle sorte que pour $u \in L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n)$, on a :

$$\|Gu\|_{L^2(\mathbf{R}^{n+2})} = \|u\|_{L^2(\mathbf{R}^{n+1})}. \tag{4.2}$$

Du fait que la quantité $\langle \varphi^-(t), \varphi^+(t)\rangle_{\mathcal{H}}$ est constante par rapport à $t$, on peut alors voir comme dans [12] Lemme 4.4 que l'on a pour tout $t \in \mathbf{R}$ :

$$\begin{aligned}&\left\langle \varphi^-(t), \varphi^+(t)\right\rangle_{\mathcal{H}} \\ &\quad = \left\langle G\varphi^-(t,\tau,\xi), G\varphi^+(t,\tau,\xi)\right\rangle_{L^2(\mathbf{R}_\tau \times \mathbf{R}_\xi^n)\oplus L^2(\mathbf{R}_\tau \times \mathbf{R}_\xi^n)}.\end{aligned} \tag{4.3}$$

De plus, d'après (3.5), les fonctions

$$\psi^\pm = G\varphi^\pm \tag{4.4}$$

sont solutions de

$$(hD_t - Q)\psi^\pm = 0 \tag{4.5}$$

avec

$$Q = \begin{pmatrix} \xi^2 + V_1(-hD_\xi) & h\widehat{R} \\ h\widehat{R}^* & \xi^2 + V_2(-hD_\xi) \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

où $\widehat{R} = \widehat{R}(\xi, hD_\xi) := \mathcal{F}R(x, hD_x)\mathcal{F}^{-1}$, $\mathcal{F}$ étant la transformation de Fourier semi-classique définie par :

$$\mathcal{F}u(\xi;h) = \int e^{-ix\xi/h} u(x)\,dx.$$

Avec des notations évidentes, ces fonctions vérifient également :

LEMME 4.1. – *On a :*

$$\|\Pi_2\psi^-(t,\tau,\xi)\|_{L^2(\mathbf{R}_\tau\times\mathbf{R}^n_\xi)}\to 0 \quad \textit{lorsque } t\to+\infty$$

*et*

$$\|\Pi_1\psi^+(t,\tau,\xi)\|_{L^2(\mathbf{R}_\tau\times\mathbf{R}^n_\xi)}\to 0 \quad \textit{lorsque } t\to-\infty.$$

*Preuve.* – Du fait que $\Pi_j\psi^\pm = G\Pi_j\varphi^\pm$ $(j=1,2)$, un calcul direct donne :

$$\|\Pi_j\psi^\pm\|^2_{L^2(\mathbf{R}_\tau\times\mathbf{R}^n_\xi)} = \left(\frac{\mu}{2\pi h}\right)^{\frac{1}{2}}\int e^{-\mu(t-t')^2/2h}\|\Pi_j\varphi^\pm\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n)}\,dt'$$

d'où l'on déduit facilement le résultat en coupant l'intégrale en deux parties (suivant que $|t-t'|\leqslant\langle t\rangle/2$ ou $|t-t'|\geqslant\langle t\rangle/2$) et en utilisant (3.7) et (3.8). □

## 5. ESTIMATIONS PRÉLIMINAIRES

Pour $1<s<\rho$, on note $\mathcal{A}(s)$ l'ensemble :

$$\mathcal{A}(s)=\left\{(s_1,s_2)\in\mathbf{R}^2;\ s_2\geqslant 0,\ s_1<\mathrm{Min}(s,s_2)-\tfrac{1}{2}\right\}. \tag{5.1}$$

Avec $s$ et $\varphi^\pm$ comme dans (3.4), soit $(s_1,s_2)\in\mathcal{A}(s)$ et posons

$$u^\pm=\langle t\rangle_b^{s_1}\langle x\rangle^{-s_2}\varphi^\pm \tag{5.2}$$

ainsi que

$$v^\pm=Gu^\pm=\langle t-hD_\tau\rangle_b^{s_1}\langle hD_\xi\rangle^{-s_2}\psi^\pm \tag{5.3}$$

où, pour des raisons d'analyticité, on a posé ici :

$$\langle t\rangle_b=\left(b^2+t^2\right)^{1/2} \tag{5.4}$$

avec $b>a$ qui sera précisé plus loin. Dans la section suivante, on cherchera à obtenir des estimations sur la décroissance exponentielle de $v^\pm$ lorsque $h\to 0$. Ici, on commence par montrer :

LEMME 5.1. – *On a* $u^\pm\in L^2(\mathbf{R}^{n+1})\oplus L^2(\mathbf{R}^{n+1})$ *et*

$$\|u^\pm\|_{L^2(\mathbf{R}^{n+1})\oplus L^2(\mathbf{R}^{n+1})}=\mathcal{O}(1)$$

*uniformément par rapport à $h > 0$ assez petit et $\varphi_0^\pm \in H^2(\mathbf{R}^n)$ vérifiant* $\|\varphi_0^\pm\|_{L^2} = 1$.

*Preuve.* – On peut supposer sans restreindre la généralité que $s_2 < s$. Puisque $\varphi^\pm \in L^\infty(\mathbf{R}_t; L^2(\mathbf{R}_x^n) \oplus L^2(\mathbf{R}_x^n))$ et $s_2 - s_1 > 1/2$, il suffit alors de montrer que :

$$\left\| \langle x \rangle^{-s_2} \varphi^\pm \right\|_{L^2(\mathbf{R}_x^n) \oplus L^2(\mathbf{R}_x^n)} = \mathcal{O}\left(\langle t \rangle^{-s_2}\right)$$

uniformément par rapport à $t$, $h$ et $\varphi_0^\pm$.

Du fait de l'hypothèse de non-capture (2.10), on peut d'abord construire comme dans [2] une fonction de fuite $G_j(x,\xi)$ pour $\xi^2 + V_j(x)$ au niveau d'énergie $\tau_0$. Puisque $\inf|V_2 - V_1| > 0$, on peut ensuite recoller $G_1$ et $G_2$ (suivant en cela une idée de [5]), de telle sorte que la fonction qui en résulte soit une fonction de fuite aussi bien pour $\xi^2 + V_1$ que pour $\xi^2 + V_2$. Quantifiant cette fonction comme dans [2], on obtient alors un opérateur conjugué à $P$ au sens de la théorie de Mourre [14], qui permet d'obtenir l'estimation des valeurs au bord de la résovante de $P$ suivante : $\forall \nu > 1/2$,

$$\left\| \langle x \rangle^{-\nu} (P - \lambda \pm i0)^{-1} \langle x \rangle^{-\nu} \right\| = \mathcal{O}\left(h^{-1}\right)$$

uniformément par rapport à $h$, et pour $\lambda$ dans un voisinage réel assez petit de $\tau_0$. Cette estimation signifie que $\langle x \rangle^{-\nu}$ est $P$-lisse au sens de [18], et on peut alors en déduire comme dans [21] Theorem 4.1 que si $\tilde{f} \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\operatorname{Supp} \tilde{f}$ est dans un voisinage assez petit de $\tau_0$, et $s_2 \geqslant 0$ on a :

$$\left\| \langle x \rangle^{-s_2} \tilde{f}(P) e^{itP/h} \langle x \rangle^{-s_2} \right\| = \mathcal{O}\left(\langle t \rangle^{-s_2}\right). \tag{5.5}$$

En suivant ensuite les constructions faites dans [6] (et notamment en contrôlant la dépendance en $h$), on peut alors en déduire pour $0 \leqslant s_2 < s$ :

$$\left\| \langle x \rangle^{s_2} W_\pm f(P_0) \langle x \rangle^{-s} \right\| = \mathcal{O}(1). \tag{5.6}$$

Finalement, choisissant $f$ et $\tilde{f}$ de telle sorte que $\tilde{f} = 1$ sur $\operatorname{Supp} f$, le lemme en résulte en écrivant :

$$\langle x \rangle^{-s_2} \varphi^\pm = \left(\langle x \rangle^{-s_2} \tilde{f}(P) e^{itP/h} \langle x \rangle^{-s_2}\right)\left(\langle x \rangle^{s_2} W_\pm f(P_0) \langle x \rangle^{-s}\right) \tilde{\varphi}_0^\pm$$

où

$$\tilde{\varphi}_0^- = \begin{pmatrix} \varphi_0^- \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{\varphi}_0^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_0^+ \end{pmatrix}. \qquad \square$$

## 6. LOCALISATION EN $\tau$

Avant de pouvoir adopter la stratégie de [12], on va d'abord exploiter ici la présence de la localisation en énergie $f(P_0)$ pour en tirer un résultat de décroissance exponentielle de $\psi^{\pm}$ pour $\tau$ en dehors d'un voisinage de $\tau_0$. Plus précisément, on va montrer :

PROPOSITION 6.1. – *Pour tout* $\nu > 0$ *et pour tout* $C > 0$, *il existe* $\mu_0 > 0$ *tel que si* $\mu \leqslant \mu_0$, *alors* :

$$\|e^{C\langle\tau\rangle/h}\langle t\rangle^{s_1}\langle hD_\xi\rangle^{-s_2}\psi_j^{\pm}\|_{L^2(|\tau-\tau_0|\geqslant\delta+\nu)} = \mathcal{O}(1)$$

*uniformément par rapport à* $h > 0$ *assez petit et* $\varphi_0^{\pm} \in H^2(\mathbf{R}^n)$ *vérifiant* $\|\varphi_0^{\pm}\|_{L^2} = 1$.

*Preuve.* – Soit $\tilde{f} \in C_0^\infty(]\tau_0-\delta-\nu/2, \tau_0+\delta+\nu/2[)$ telle que $\tilde{f} = 1$ sur $[\tau_0-\delta, \tau_0+\delta]$. En particulier, on a donc $\tilde{f}f = f$. Du fait de la propriété d'entrelacemant des opérateurs d'onde, on a alors par construction :

$$\varphi^{\pm}(t) = \tilde{f}(P)\varphi^{\pm}(t)$$

d'où l'on déduit immédiatement :

$$\psi^{\pm} = \tilde{f}(Q)\psi^{\pm} \tag{6.1}$$

où l'égalité a lieu par exemple dans $L^\infty(\mathbf{R}_t;\ L^2(\mathbf{R}_\tau \times \mathbf{R}_\xi^n) \oplus L^2(\mathbf{R}_\tau \times \mathbf{R}_\xi^n))$.

Soit ensuite $\beta = \beta(\tau) \in C^\infty(\mathbf{R};\ \mathbf{R}_+)$ telle que :

$$\beta = 0 \text{ dans un voisinage de Supp } \tilde{f} \tag{6.2}$$
$$\beta(\tau) = C\langle\tau\rangle \text{ pour } |\tau-\tau_0| \geqslant \delta+\nu$$

Il suffit donc d'estimer $\|e^{\beta/h}w^{\pm}\|$, où l'on a noté :

$$w^{\pm} = B\psi^{\pm} \tag{6.3}$$

avec $B = \langle t\rangle^{s_1}\langle hD_\xi\rangle^{-s_2}$. On voit par une technique standard de commutateurs que pour tout $z \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$, les opérateurs $B(Q-z)^{-1}B^{-1}$ et $B(hD_t-z)^{-1}B^{-1}$ (définis sur $B(L^2(\mathbf{R}^{n+2}))$) se prolongent en des opérateurs bornés sur $L^2(\mathbf{R}^{n+2})$, de norme $\mathcal{O}(|\mathrm{Im}\, z|^{-N_0})$ pour un certain $N_0 > 0$. Utilisant alors le calcul fonctionnel des opérateurs $h$-pseudodifférentiels se trouvant dans [3], on en déduit que les opérateurs $B\tilde{f}(Q)B^{-1}$ et

$B\tilde{f}(hD_t)B^{-1}$ se prolongent également en des opérateurs bornés sur $L^2(\mathbf{R}^{n+2})$.

En particulier, $\tilde{f}(Q)\psi^{\pm}$ et $\tilde{f}(hD_t)\psi^{\pm}$ ont un sens comme éléments de $B^{-1}(L^2(\mathbf{R}^{n+2}) \oplus L^2(\mathbf{R}^{n+2}))$, de même que $(Q-z)^{-1}\psi^{\pm}$ et $(hD_t - z)^{-1}\psi^{\pm}$ pour $z \notin \mathbf{R}$. On déduit alors aisément de (4.5) que l'on a :

$$(Q-z)^{-1}\psi^{\pm} = (hD_t - z)^{-1}\psi^{\pm}$$

et donc, en utilisant à nouveau le calcul fonctionnel des opérateurs $h$-pseudodifférentiels :

$$\tilde{f}(Q)\psi^{\pm} = \tilde{f}(hD_t)\psi^{\pm}. \tag{6.4}$$

On en déduit, d'après (6.1) :

$$\psi^{\pm} = \tilde{f}(hD_t)\psi^{\pm}. \tag{6.5}$$

On utilise maintenant l'estimation microlocale à poids exponentiel suivante, qui résulte par exemple de [16] Proposition 8, du fait que $B(1-\tilde{f}(hD_t))B^{-1}$ est un opérateur $h$-pseudodifférentiel qui commute avec $e^{\beta(\tau)/h}$, et du fait que $\partial_\tau\beta$ reste borné : pour tout $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$,

$$\begin{aligned} &\left\|e^{\beta(\tau)/h}B(1-\tilde{f}(hD_t))Gu\right\|^2 \\ &\quad = \left\|(1-\tilde{f}(\tau-\mu\partial_\tau\beta))e^{\beta(\tau)/h}BGu\right\|^2 + \mathcal{O}(h)\left\|e^{\beta(\tau)/h}BGu\right\|^2 \end{aligned} \tag{6.6}$$

uniformément par rapport à $h$ et $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$. En particulier, pour $h$ assez petit on aura :

$$\begin{aligned} \left\|(1-\tilde{f}(\tau-\mu\partial_\tau\beta))e^{\beta(\tau)/h}BGu\right\|^2 &= \mathcal{O}\Big(\left\|e^{\beta(\tau)/h}B(1-\tilde{f}(hD_t))Gu\right\|^2\Big) \\ &+ \mathcal{O}(h)\left\|\tilde{f}(\tau-\mu\partial_\tau\beta)e^{\beta(\tau)/h}BGu\right\|^2 \end{aligned} \tag{6.7}$$

avec la même uniformité.

Par un argument de densité, on voit que l'on peut appliquer (6.7) avec $u = \varphi^{\pm}$, ce qui, d'après (6.5), donne :

$$\begin{aligned} &\left\|(1-\tilde{f}(\tau-\mu\partial_\tau\beta))e^{\beta(\tau)/h}w^{\pm}\right\| \\ &\quad = \mathcal{O}(\sqrt{h})\left\|\tilde{f}(\tau-\mu\partial_\tau\beta)e^{\beta(\tau)/h}w^{\pm}\right\|. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Utilisant alors la propriété (6.2) de $\beta$, si l'on choisit $\mu$ assez petit on aura $\beta = 0$ sur le support de $\tilde{f}(\tau-\mu\partial_\tau\beta)$, et dans ce cas (6.8) devient :

$$\left\|(1-\tilde{f}(\tau-\mu\partial_\tau\beta))e^{\beta(\tau)/h}w^{\pm}\right\| = \mathcal{O}(\sqrt{h})\left\|\tilde{f}(\tau-\mu\partial_\tau\beta)w^{\pm}\right\|. \tag{6.9}$$

D'après le Lemme 5.1, on en déduit finalement :

$$\left\|(1-\tilde{f}(\tau-\mu\partial_\tau\beta))e^{\beta(\tau)/h}w^{\pm}\right\| = \mathcal{O}(1) \tag{6.10}$$

uniformément, d'où le résultat voulu. □

## 7. ESTIMATIONS MICROLOCALES À POIDS EXPONENTIEL

On reprend maintenant la stratégie de [12] et [1]. Soit $g = g(\tau, \xi) \in C^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$ bornée telle que $\sup|\partial_\xi g| < a$ et $\sup|\partial_\tau g| < b$. Dans cette section, on va chercher à préciser $g$ pour avoir des estimations sur $e^{g/h}\psi^{\pm}$.

Tout d'abord, d'après [12] Lemme 2.2, on voit que pour tout $u \in L^2(\mathbf{R}^{n+1})$ on a :

$$\begin{aligned} &\left\|e^{g(\tau,\xi)/h}(hD_t - \tau + \mu\partial_\tau g)Gu\right\|^2_{L^2(\mathbf{R}^{n+2})} \\ &\qquad = \mathcal{O}(h)\left\|e^{g/h}Gu\right\|^2_{L^2(\mathbf{R}^{n+2})}. \end{aligned} \tag{7.1}$$

D'autre part, grâce aux hypothèses faites sur $V_1, V_2$ et $R$, on voit que l'opérateur

$$Q_g := e^{g/h}Qe^{-g/h} = Q_g(\tau, \xi, hD_\xi) \tag{7.2}$$

est un opérateur $h$-pseudodifférentiel de symbole principal :

$$q_g^0(\tau,\xi,\xi^*) = \begin{pmatrix} \xi^2 + V_1(-\xi^* - i\partial_\xi g) & 0 \\ 0 & \xi^2 + V_2(-\xi^* - i\partial_\xi g) \end{pmatrix}. \tag{7.3}$$

On se donne maintenant $\varepsilon > 0$ assez petit, et on suppose que $g$ vérifie en outre :

$$\begin{aligned} &\operatorname{Supp}\nabla g \subset \left\{\tau - \xi^2 \in [\sup V_2 + 2\varepsilon, \inf V_1 - 2\varepsilon]\right\} \\ &\qquad\qquad \cup \left\{|\tau - \tau_0| \geqslant 2\delta\right\} \\ &\left|\partial_\xi g(\tau,\xi)\right| \leqslant \left(\kappa\left(\tau - \xi^2\right) - 2\varepsilon\right)_+ \end{aligned} \tag{7.4}$$

où l'on a posé $\kappa(\lambda) = 0$ si $\lambda \notin ]\sup V_2, \inf V_1[$.

Du fait que $\kappa$ est continue sur $]\sup V_2, \inf V_1[$ (cf. [12] Section 3), on peut alors fixer $\mu > 0$ assez petit (en fonction uniquement des valeurs de

$\varepsilon$ et $b$) de telle sorte que :

$$\begin{aligned} &\mathrm{Supp}\nabla g \subset \{\tau - \xi^2 - \mu\partial_\tau g \in [\sup V_2 + \varepsilon, \inf V_1 - \varepsilon]\} \\ &\qquad \cup \{|\tau - \tau_0| \geqslant 2\delta\} \qquad (7.5) \\ &|\partial_\xi g(\tau, \xi)| \leqslant (\kappa(\tau - \xi^2 - \mu\partial_\tau g) - \varepsilon)_+. \end{aligned}$$

Si pour $j = 1, 2$ on pose

$$v_j^\pm = \Pi_j v^\pm$$

(où $v^\pm$ est définie en (5.3)), on a alors :

PROPOSITION 7.1. – *Pour tout $\varepsilon$, $g$ vérifiant* (7.4) *et $\mu$ vérifiant* (7.5), *il existe $C = C(g, \varepsilon, \mu) > 0$ telle que* :

$$\|e^{g/h} v_1^\pm\|_{L^2} \leqslant Ch \|e^{g/h} v_2^\pm\|_{L^2} + Ce^{g_+/h} \|v_1^\pm\|_{L^2(\tau - \xi^2 \geqslant \inf V_1 - 2\varepsilon)} + Ce^{-\Sigma_0/h} \qquad (7.6)$$

*et*

$$\|e^{g/h} v_2^\pm\|_{L^2} \leqslant Ch \|e^{g/h} v_1^\pm\|_{L^2} + Ce^{g_-/h} \|v_2^\pm\|_{L^2(\tau - \xi^2 \leqslant \sup V_2 + 2\varepsilon)} + Ce^{-\Sigma_0/h} \qquad (7.7)$$

*où*

$$g_+ = g|_{\{\tau - \xi^2 \geqslant \inf V_1 - 2\varepsilon; |\tau - \tau_0| \leqslant 2\delta\}}$$

*et*

$$g_- = g|_{\{\tau - \xi^2 \leqslant \sup V_2 + 2\varepsilon; |\tau - \tau_0| \leqslant 2\delta\}}$$

(*qui sont constantes d'après* (7.4)).

*Preuve.* – D'après (4.5), les fonctions $v^\pm$ vérifient l'équation :

$$(hD_t - Q + R_1)v^\pm = 0 \qquad (7.8)$$

avec

$$R_1 = [\langle t - hD_\tau \rangle^{s_1} \langle hD_\xi \rangle^{-s_2}, hD_t - Q]\, \langle t - hD_\tau \rangle^{-s_1}\, \langle hD_\xi \rangle^{s_2}.$$

Le calcul pseudodifférentiel semi-classique standard (cf. par exemple [19]) et les hypothèses faites sur $V_1$, $V_2$ et $R$ donnent alors :

$$R_1 = [\xi^2, \langle hD_\xi \rangle^{-s_2}] \langle hD_\xi \rangle^{s_2} + hR_2(t, \xi, hD_\tau, hD_\xi; h)$$

où $R_2$ est un opérateur $h$-pseudodifférentiel, de symbole $r_2(t, \xi, \tau^*, \xi^*)$ uniformément borné et analytique par rapport à $\tau^*$ dans $S_b$ et $\xi^*$ dans $S_a$. En particulier, on aura :

$$\|e^{g/h} R_2 e^{-g/h}\| = \mathcal{O}(1)$$

uniformément par rapport à $h$.

D'autre part, passant à nouveau dans les coordonnées $x$ à l'aide d'une conjugaison par $\mathcal{F}^{-1}$, on voit que

$$\begin{aligned} & h^{-1}\mathcal{F}^{-1}\langle\xi\rangle^{-1}\left[\xi^2, \langle hD_\xi\rangle^{-s_2}\right]\langle hD_\xi\rangle^{s_2}\mathcal{F} \\ & \quad = \langle hD_x\rangle^{-1}\left[-h\Delta, \langle x\rangle^{-s_2}\right]\langle x\rangle^{s_2} \end{aligned}$$

est lui aussi un opérateur $h$-pseudodifférentiel uniformément borné, de symbole analytique par rapport à $x$ dans $S_a$. On en déduit :

$$\|e^{g/h} R_1 e^{-g/h} v^\pm\| = \mathcal{O}\big(h\|\langle\xi\rangle e^{-g/h} v^\pm\|\big) \tag{7.9}$$

uniformément pour $h$ assez petit.

Notant $Q_g^0 = \mathrm{Op}_h^W(q_g^0)$ et utilisant (7.8), (7.1) et le fait que $\langle\xi\rangle^{-1}(Q_g - Q_g^0) = \mathcal{O}(h)$ uniformément, on obtient :

$$\|(hD_t - Q_g^0)e^{g/h}v^\pm\| = \mathcal{O}(h)\|\langle\xi\rangle e^{g/h} v^\pm\| \tag{7.10}$$

d'où, à l'aide de (7.2) :

$$\begin{aligned} & \|(\tau - \mu\partial_\tau g - \xi^2 - B_j^g)e^{g/h} v_j^\pm\|^2 \\ & \quad = \mathcal{O}(h)\|e^{g/h} v_j^\pm\|^2 + \mathcal{O}(h^2)\|\langle\xi\rangle e^{g/h} v^\pm\|^2 \end{aligned} \tag{7.11}$$

($j = 1, 2$), où l'on a posé :

$$B_j^g = B_j^g(\tau, \xi, hD_\xi) := e^{g/h} V_j(-hD_\xi) e^{-g/h} \tag{7.12}$$

qui est donc un opérateur $h$-pseudodifférentiel uniformément borné, de symbole principal $V_j(-\xi^* - i\partial_\xi g(\tau, \xi))$. Du fait que $g$ a été prise bornée, on voit qu'en utilisant la Proposition 6.1 avec $C$ assez grand, on aura en particulier :

$$\|(\tau - \mu\partial_\tau g - B_j^g)e^{g/h} v_j^\pm\|^2_{L^2(|\tau-\tau_0|\geqslant 2\delta)} = \mathcal{O}\big(e^{-2\Sigma_0/h}\big) \tag{7.13}$$

et donc, d'après (7.11) :

$$\begin{aligned}&\left\|\langle\xi\rangle^2 e^{g/h} v_j^{\pm}\right\|^2_{L^2(|\tau-\tau_0|\geqslant 2\delta)}\\&\quad=\mathcal{O}(h)\left\|e^{g/h} v_j^{\pm}\right\|^2+\mathcal{O}(h^2)\left\|\langle\xi\rangle e^{g/h} v^{\pm}\right\|^2+\mathcal{O}(e^{-2\Sigma_0/h}).\end{aligned}$$

En particulier, pour $h$ assez petit on aura :

$$\begin{aligned}\left\|\langle\xi\rangle^2 e^{g/h} v_j^{\pm}\right\|^2_{L^2(|\tau-\tau_0|\geqslant 2\delta)}&=\mathcal{O}(h)\left\|e^{g/h} v_j^{\pm}\right\|^2\\&+\mathcal{O}(h^2)\left\|\langle\xi\rangle e^{g/h} v^{\pm}\right\|^2_{L^2(|\tau-\tau_0|\leqslant 2\delta)}+\mathcal{O}(e^{-2\Sigma_0/h}).\end{aligned}\tag{7.14}$$

D'autre part, si $C'>0$ est assez grand, on a :

$$\begin{aligned}&\left\|\langle\xi\rangle e^{g/h} v^{\pm}\right\|^2_{L^2(|\tau-\tau_0|\leqslant 2\delta;|\xi|\geqslant C')}\\&\quad=\mathcal{O}\Big(\left\|(\tau-\mu\partial_\tau g-\xi^2-B_j^g)e^{g/h} v_j^{\pm}\right\|^2\Big).\end{aligned}\tag{7.15}$$

On déduit de (7.11)–(7.15) que l'on a donc en fait, pour $h$ assez petit :

$$\begin{aligned}&\left\|(\tau-\mu\partial_\tau g-\xi^2-B_j^g)e^{g/h} v_j^{\pm}\right\|^2\\&\quad=\mathcal{O}(h)\left\|e^{g/h} v_j^{\pm}\right\|^2+\mathcal{O}(h^2)\left\|e^{g/h} v^{\pm}\right\|^2+\mathcal{O}(e^{-2\Sigma_0/h}).\end{aligned}\tag{7.16}$$

Maintenant, grâce aux conditions (7.4)–(7.5) et à la définition de $\kappa$, on voit qu'il existe une constante $C_\varepsilon>0$ telle que pour $\tau-\xi^2\in[\sup V_2+\varepsilon,\inf V_1-\varepsilon]$ et $\xi^*\in\mathbf{R}^n$, on a :

$$\left|\tau-\mu\partial_\tau g-\xi^2-V_j(-\xi^*-i\partial_\xi g)\right|\geqslant\frac{1}{C_\varepsilon}\quad(j=1,2).\tag{7.17}$$

D'autre part, si $\tau-\xi^2\leqslant\sup V_2+\varepsilon$ et $|\tau-\tau_0|\leqslant 2\delta$, alors

$$\begin{aligned}&\tau-\mu\partial_\tau g-\xi^2-V_1(-\xi^*-i\partial_\xi g)\\&\quad=\tau-\xi^2-V_1(-\xi^*)\leqslant-\frac{\Gamma_0}{2}+\varepsilon.\end{aligned}\tag{7.18}$$

De même, si $\tau-\xi^2\geqslant\inf V_1-\varepsilon$ et $|\tau-\tau_0|\leqslant 2\delta$, alors

$$\begin{aligned}&\tau-\mu\partial_\tau g-\xi^2-V_2(-\xi^*-i\partial_\xi g)\\&\quad=\tau-\xi^2-V_2(-\xi^*)\geqslant\frac{\Gamma_0}{2}-\varepsilon.\end{aligned}\tag{7.19}$$

Soit $\chi_1\in C^\infty(\mathbf{R})$ telle que :

$$\begin{aligned}&\operatorname{Supp}\chi_1\subset\,]-\infty,\inf V_1-\varepsilon[\\&\chi_1=1\quad\text{sur}\;]-\infty,\inf V_1-2\varepsilon[.\end{aligned}$$

Soit également $\chi_2\in C^\infty(\mathbf{R})$ telle que :

$$\operatorname{Supp}\chi_2 \subset ]\sup V_2+\varepsilon,+\infty[$$
$$\chi_2 = 1 \quad \text{sur} ]\sup V_2+2\varepsilon,+\infty[.$$

A l'aide du calcul $h$-pseudodifférentiel, on peut alors facilement déduire de (7.17)–(7.19) l'existence d'une constante $C_1>0$ telle que pour tout $v\in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n+2})$, on a :

$$\|(\tau-\mu\partial_\tau g-\xi^2-B_j^g)\tilde{\chi}_j v\|_{L^2(|\tau-\tau_0|\leqslant 2\delta)} \geqslant \frac{1}{C_1}\|\tilde{\chi}_j v\|_{L^2(|\tau-\tau_0|\leqslant 2\delta)}$$
$$(j=1,2) \tag{7.20}$$

où l'on a noté $\tilde{\chi}_j=\chi_j(\tau-\xi^2)$. En écrivant $v=\tilde{\chi}_j v+(1-\tilde{\chi}_j)v$, on remarque aussi (puisque $\tau-\xi^2$ reste borné sur le support de $\tilde{\chi}_j(1-\tilde{\chi}_j)$) que l'on a :

$$\begin{aligned}&\|(\tau-\mu\partial_\tau g-\xi^2-B_j^g)v\|^2\\ &\quad\geqslant \|(\tau-\mu\partial_\tau g-\xi^2-B_j^g)\tilde{\chi}_j v\|^2-\mathcal{O}(\|\tilde{\chi}_j v\|.\|(1-\tilde{\chi}_j)v\|)\end{aligned}$$

où il s'agit toujours des normes dans $L^2(|\tau-\tau_0|\leqslant 2\delta)$. A l'aide de (7.20), on en déduit :

$$\begin{aligned}\|\tilde{\chi}_j v\|^2_{L^2(|\tau-\tau_0|\leqslant 2\delta)} = \mathcal{O}\Big(&\|(\tau-\mu\partial_\tau g-\xi^2-B_j^g)v\|^2_{L^2(|\tau-\tau_0|\leqslant 2\delta)}\\ &+\|(1-\tilde{\chi}_j)v^\pm\|^2_{L^2(|\tau-\tau_0|\leqslant 2\delta)}\Big).\end{aligned} \tag{7.21}$$

Par un argument de densité, appliquant (7.21) à $v=e^{g/h}v_j^\pm$ et utilisant (7.16) ainsi que la Proposition 6.1, on obtient donc :

$$\begin{aligned}\|\tilde{\chi}_j e^{g/h}v_j^\pm\|^2 = \mathcal{O}\Big(&h\|e^{g/h}v_j^\pm\|^2+h^2\|e^{g/h}v^\pm\|^2\\ &+\|(1-\tilde{\chi}_j)e^{g/h}v_j^\pm\|^2+e^{-2\Sigma_0/h}\Big)\end{aligned} \tag{7.22}$$

et par suite, en prenant $h$ assez petit :

$$\|e^{g/h}v_j^\pm\|^2=\mathcal{O}\Big(h^2\|e^{g/h}v^\pm\|^2+\|(1-\tilde{\chi}_j)e^{g/h}v_j^\pm\|^2+e^{-2\Sigma_0/h}\Big). \tag{7.23}$$

Du fait que $\operatorname{Supp}(1-\tilde{\chi}_1)\subset\{\tau-\xi^2\geqslant\inf V_1-2\varepsilon\}$ et $\operatorname{Supp}(1-\tilde{\chi}_2)\subset\{\tau-\xi^2\leqslant\sup V_2+2\varepsilon\}$, la proposition résulte facilement de (7.23) en diminuant éventuellement encore $h$. □

Une conséquence immédiate de la Proposition 7.1 et du Lemme 5.1 est :

COROLLAIRE 7.1. – *Soit* $g = g(\tau, \xi) \in C^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$ *telle que* $|\partial_\xi g| \leqslant (\kappa(\tau - \xi^2) - 2\varepsilon)_+$, $\sup|\partial_\tau g| < b$, *et* $\operatorname{Supp} g \subset \{\tau - \xi^2 \in [\sup V_2 + 2\varepsilon, \inf V_1 - 2\varepsilon]\}$. *Alors, pour* $j = 1, 2$, *on a* :

$$\|e^{g/h} v_j^\pm\|_{L^2} = \mathcal{O}(1)$$

*uniformément par rapport à* $h > 0$ *assez petit et* $\varphi_0^\pm \in H^2(\mathbf{R}^n)$ *normalisés dans* $L^2(\mathbf{R}^n)$.

Utilisant ensuite (7.1) et la Proposition 6.1, on déduit de ce lemme que sous les mêmes conditions on a pour tout entier $k \geqslant 0$ :

$$\|(hD_t)^k e^{g/h} v_j^\pm\|_{L^2} = \mathcal{O}(1)$$

d'où, à l'aide de (7.8) :

$$\|\langle\xi\rangle^2 (hD_t)^k e^{g/h} v_j^\pm\|_{L^2} = \mathcal{O}(1).$$

Remarquant aussi que la transformation $G$ vérifie :

$$hD_t G = (\tau + i\mu h D_\tau) G \tag{7.24}$$

on obtient également pour tous entiers $k, l$ :

$$\|\langle\xi\rangle^2 (hD_t)^k (hD_\tau)^l e^{g/h} v_j^\pm\|_{L^2} = \mathcal{O}(1). \tag{7.25}$$

Enfin, écrivant que

$$(hD_\tau)^l \langle t\rangle^{s_1} = (hD_\tau)^l \langle t - hD_\tau\rangle^{-s_1} \langle t\rangle^{s_1} \langle t - hD_\tau\rangle^{s_1}$$

et utilisant le fait que (au sens des opérateurs) $\langle t\rangle^{s_1} \leqslant \langle t - hD_\tau\rangle^{s_1} + \langle hD_\tau\rangle^{s_1}$ lorsque $s_1 \geqslant 0$, et $\langle t - hD_\tau\rangle^{-s_1} \leqslant \langle hD_\tau\rangle^{-s_1} + \langle t\rangle^{-s_1}$ lorsque $s_1 \leqslant 0$, on déduit facilement de (7.25) :

$$\|\langle\xi\rangle^2 (hD_t)^k (hD_\tau)^l \langle t\rangle^{s_1} \langle hD_\xi\rangle^{-s_2} e^{g/h} \psi_j^\pm\|_{L^2} = \mathcal{O}(1) \tag{7.26}$$

où le $\mathcal{O}$ peut dépendre de $b$ et $\varepsilon$, mais pas de $h$.

Considérons alors la fonction $g_1$ définie par :

$$g_1(\tau, \xi) = f_1(\tau, \tau - \xi^2) \mathbf{1}_{[\inf V_1, +\infty[}(\tau) \tag{7.27}$$

avec

$$f_1(\tau,\lambda)=\mathrm{Min}\left\{\int_{\sup V_2}^{\lambda}\frac{\kappa(\theta)}{2\sqrt{\tau-\theta}}\,d\theta;\ \int_{\lambda}^{\inf V_1}\frac{\kappa(\theta)}{2\sqrt{\tau-\theta}}\,d\theta\right\}\times \mathbf{1}_{[\sup V_2,\inf V_1]}(\lambda). \tag{7.28}$$

Du fait que pour presque tout $(\tau,\xi)$ on a $|\partial_\xi g_1|\leqslant|2\xi\partial_\lambda f_1(\tau,\tau-\xi^2)|=\kappa(\tau-\xi^2)$ et $|\partial_\tau g_1|=\mathcal{O}(|\tau-\inf V_1|^{-1})$, on voit que, $\varepsilon>0$ étant donné, on peut alors trouver $g\in C^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$ et $b=b_\varepsilon>a$ tels que $\sup|g-g_1|\leqslant\varepsilon$ et les conditions du Corollaire 7.1 soient satisfaites. L'estimation (7.26) permet donc finalement d'énoncer :

COROLLAIRE 7.2. – *Avec $g_1$ défini en* (7.27), *pour tout $\varepsilon>0$ si $\mu>0$ et $\delta>0$ sont choisis suffisamment petits on aura, pour tout $k,l\in\mathbf{N}$* :

$$\|\langle\xi\rangle^2(hD_t)^k(hD_\tau)^l\langle t\rangle^{s_1}\langle hD_\xi\rangle^{-s_2}e^{g_1/h}\psi_j^\pm\|_{L^2}=\mathcal{O}(e^{\varepsilon/h})$$

*uniformément par rapport à $h>0$ assez petit et $\varphi_0^\pm\in H^2(\mathbf{R}^n)$ normalisés dans $L^2(\mathbf{R}^n)$.*

## 8. PROPAGATION DES ESTIMATIONS

Reprenant maintenant la stratégie adoptée dans [12], on va en déduire des propriétes de décroissance exponentielle de $v_j^-$ (respectivement $v_j^+$) dans la région $\{\tau-\xi^2\in]-\infty,\inf V_1]\}$ (respectivement $\{\tau-\xi^2\in[\sup V_2,+\infty[\}$).

Soit $\lambda_1\in]\sup V_2,\inf V_1[$ le point où la fonction $f_1(\tau_0,\lambda)$ définie en (7.28) atteint son maximum. En particulier on aura alors sur $\{\xi^2=\tau_0-\lambda_1\}$ :

$$g_1(\tau_0,\xi)=\tfrac{1}{2}\Sigma_0. \tag{8.1}$$

Soit maintenant $\delta>0$ assez petit tel que la localisation en énergie $f(P_0)$ vérifie :

$$\mathrm{Supp}\,f\subset]\tau_0-\delta,\tau_0+\delta[ \tag{8.2}$$

et soit $\chi_0\in C^\infty(\mathbf{R}_+)$ telle que :

$$\mathrm{Supp}\,\chi_0'\subset[\sqrt{\tau_0-\lambda_1}-2\delta,\sqrt{\tau_0-\lambda_1}+2\delta], \tag{8.3}$$

$$\chi_0=1\quad \mathrm{sur}\,[0,\sqrt{\tau_0-\lambda_1}-2\delta], \tag{8.4}$$

$$\chi_0=0\quad \mathrm{sur}\,[\sqrt{\tau_0-\lambda_1}+2\delta,+\infty[, \tag{8.5}$$

$$\chi_0'\leqslant 0. \tag{8.6}$$

Posons $\chi(\xi) = \chi_0(|\xi|)$. D'après (4.5), on a donc :

$$(hD_t - Q)\chi\psi^{\pm} = [\chi, Q]\psi^{\pm}. \tag{8.7}$$

On commence par montrer :

LEMME 8.1. – *Pour tout* $(s_1, s_2) \in \mathcal{A}(s)$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$, *si* $\mu > 0$ *et* $\delta > 0$ *sont choisis suffisamment petits, on aura* :

$$\left\| \langle t\rangle^{s_1} \langle hD_\xi\rangle^{\rho - s_2} [\chi, Q]\psi^{\pm} \right\| = \mathcal{O}\left(e^{-(\Sigma_1 - \varepsilon)/h}\right)$$

*avec*

$$\Sigma_1 = \tfrac{1}{2}\Sigma_0.$$

*Preuve.* – Du fait que

$$[\chi, Q] = \begin{pmatrix} [\chi, V_1(-hD_\xi) - l_1] & h[\chi, \widehat{R}] \\ h[\chi, \widehat{R}^*] & [\chi, V_2(-hD_\xi) - l_2] \end{pmatrix}, \tag{8.8}$$

il suffit d'examiner :

$$\langle hD_\xi\rangle^{\rho - s_2} \left[\chi, c(hD_\xi)\langle\xi\rangle\right] \langle hD_\xi\rangle_a^{s_2} w_j^{\pm}$$

où $c(x)$ vérifie (2.3), et où l'on a posé :

$$w_j^{\pm} := \langle t\rangle^{s_1} \langle hD_\xi\rangle_a^{-s_2} \psi_j^{\pm}. \tag{8.9}$$

Ecrivant :

$$\begin{aligned}\left[\chi, c(hD_\xi)\langle\xi\rangle\right] \langle hD_\xi\rangle_a^{s_2} w_j^{\pm} = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int\limits_{\mathbf{R}^{2n}} e^{i(\xi - \xi')\xi^*/h} \left(\chi(\xi) - \chi(\xi')\right) \\ \times c(\xi^*)\langle\xi'\rangle \langle hD'_\xi\rangle_a^{s_2} w_j^{\pm}(t, \tau, \xi')\, d\xi'\, d\xi^*\end{aligned}$$

on effectue ensuite le changement de contour d'intégration :

$$\mathbf{R}^n \ni \xi^* \mapsto \xi^* + ia' \frac{\xi - \xi'}{\langle\xi - \xi'\rangle_\nu}$$

où $0 < a' < a$, et $\nu > 0$ peut être choisi arbitrairement petit. On obtient :

$$\left[\chi, c(hD_\xi)\langle\xi\rangle\right] \langle hD_\xi\rangle_a^{s_2} w_j^{\pm} = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int\limits_{\mathbf{R}^{2n}} e^{A(x, \xi, \xi')/h} \left(\chi(\xi) - \chi(\xi')\right)$$

$$\times c\left(\xi^* + ia'\frac{\xi - \xi'}{\langle \xi - \xi' \rangle_\nu}\right)\langle \xi' \rangle \langle hD_{\xi'} \rangle_a^{s_2} w_j^{\pm}(t, \tau, \xi')\, d\xi'\, d\xi^* \tag{8.10}$$

avec

$$A(x, \xi, \xi') = i(\xi - \xi')\xi^* - a'\frac{|\xi - \xi'|^2}{\langle \xi - \xi' \rangle_\nu}$$

et où en fait l'intégration se fait sur $\{\chi(\xi) \neq \chi(\xi')\}$.

Or, du fait des propriétés (8.3)–(8.6), il est facile de voir que si $\chi(\xi) \neq \chi(\xi')$, alors :

$$\big||\xi| - |\xi'|\big| \geqslant \big||\xi'| - \sqrt{\tau_0 - \lambda_1}\big| - 2\delta \tag{8.11}$$

(il suffit pour cela de distinguer suivant que $||\xi'| - \sqrt{\tau_0 - \lambda_1}| \leqslant 2\delta$ ou $\geqslant 2\delta$).

De plus, puisque $|\kappa(\lambda)| \leqslant a$, on a par constuction (pour $\tau \geqslant \lambda_1$) :

$$g_1(\tau, \xi') \geqslant \left(\frac{1}{2}\Sigma_0 - a\big||\xi'| - \sqrt{\tau - \lambda_1}\big|\right)_+ \tag{8.12}$$

et donc d'après (8.11), en prenant $a'$ suffisamment proche de $a$, on aura sur $\{\chi(\xi) \neq \chi(\xi')\}$ et pour $|\tau - \tau_0| \leqslant 2\delta$ ($\delta > 0$ assez petit) :

$$a'|\xi - \xi'| \geqslant \frac{1}{2}\Sigma_0 - g_1(\tau, \xi') - (3 + 2a)\delta$$

d'où également :

$$a'\frac{|\xi - \xi'|^2}{\langle \xi - \xi' \rangle_\nu} \geqslant \frac{1}{2}\Sigma_0 - g_1(\tau, \xi') - (3 + 2a)\delta - a\nu. \tag{8.13}$$

Si $\chi_1(\tau, \xi, \xi')$ est une fonction de troncature valant 1 lorsque l'inégalité (8.13) est satisfaite, et supportée dans $\{a'\frac{|\xi-\xi'|^2}{\langle \xi-\xi' \rangle_\nu} \geqslant \frac{1}{2}\Sigma_0 - g_1(\tau, \xi') - (3 + 2a)\delta - 2a\nu\}$, on peut donc écrire pour $|\tau - \tau_0| \leqslant 2\delta$ :

$$\begin{aligned}
&[\chi, c(hD_\xi)\langle \xi \rangle]\langle hD_\xi \rangle_a^{s_2} w_j^{\pm} \\
&= \frac{1}{(2\pi h)^n}\int_{\mathbf{R}^{2n}} e^{A(x,\xi,\xi')/h}\chi_1(\tau, \xi, \xi')\big(\chi(\xi) - \chi(\xi')\big) \\
&\quad \times c\left(\xi^* + ia'\frac{\xi - \xi'}{\langle \xi - \xi' \rangle_\nu}\right)\langle \xi' \rangle \langle hD_{\xi'} \rangle_a^{s_2} w_j^{\pm}(t, \tau, \xi')\, d\xi'\, d\xi^* \\
&= \frac{1}{(2\pi h)^n}\int_{\mathbf{R}^{2n}} \Big(\langle hD_{\xi'} \rangle_a^{s_2} e^{A(x,\xi,\xi')/h}\chi_1(\tau, \xi, \xi')\big(\chi(\xi) - \chi(\xi')\big)
\end{aligned}$$

$$\times c\left(\xi^* + ia'\frac{\xi-\xi'}{\langle\xi-\xi'\rangle_\nu}\right)\langle\xi'\rangle\Big) w_j^{\pm}(t,\tau,\xi')\,d\xi'\,d\xi^*$$
$$= \frac{1}{(2\pi h)^n}\int_{\mathbf{R}^{2n}} e^{i(\xi-\xi')\xi^*/h}\tilde{c}(\tau,\xi,\xi',\xi^*;h)e^{g_1(\tau,\xi')/h} w_j^{\pm}(t,\tau,\xi')\,d\xi'\,d\xi^* \tag{8.14}$$

avec

$$\tilde{c}(\tau,\xi,\xi',\xi^*;h) = e^{-g_1(\tau,\xi')/h}\langle hD_{\xi'}-\xi^*\rangle_a^{s_2} e^{g_1(\tau,\xi')/h}$$
$$\times\left(e^{-\alpha(\tau,\xi,\xi^*)/h}\chi_1(\tau,\xi,\xi')\big(\chi(\xi)-\chi(\xi')\big)c\left(\xi^*+ia'\frac{\xi-\xi'}{\langle\xi-\xi'\rangle_\nu}\right)\langle\xi'\rangle\right)$$

où

$$\alpha(\tau,\xi,\xi^*) = a'\frac{|\xi-\xi'|^2}{\langle\xi-\xi'\rangle_\nu} + g_1(\tau,\xi').$$

En particulier, du fait que sur le support de $\chi_1$ on a $\alpha \geqslant \Sigma_1-(3+2a)\delta-2a\nu$, on voit que pour $|\tau-\tau_0|\leqslant 2\delta$ la fonction

$$c_1(\tau,\xi,\xi';h) = e^{(\Sigma_1-3(1+a)\delta-3a\nu)/h}e^{-\alpha(\tau,\xi,\xi^*)/h}\chi_1(\tau,\xi,\xi')$$

est bornée uniformément par rapport à $h,\xi,\xi',\tau$ et qu'il en va de même pour toutes ses dérivés par rapport à $\xi,\xi'$. Remarquant également que $|\xi-\xi'|\geqslant|\xi'|/2$ lorsque $|\xi'|$ est trop grand et $\chi(\xi)\neq 0$, la propriété précédente est également satisfaite par la fonction $c_2 = c_1(\tau,\xi,\xi';h)(\chi(\xi)-\chi(\xi'))\langle\xi'\rangle$. Comme de plus $|\partial_\xi g_1|<a$, on en déduit de manière standard que la fonction $\tilde{c}$ est un symbole d'ordre $\langle\xi^*\rangle^{s_2-\rho}$, dans le sens qu'elle vérifie des estimations uniformes du type :

$$\partial^\gamma_{\xi,\xi',\xi^*}\tilde{c} = \mathcal{O}\big(\langle\xi^*\rangle^{s_2-\rho}\big)$$

pour tout $\gamma\in\mathbf{N}^{3n}$, et uniformément par rapport à $h,\xi,\xi',\xi^*$ et $\tau$. Utilisant alors le théorème de Calderon–Vaillancourt, on obtient pour $|\tau-\tau_0|\leqslant 2\delta$ :

$$\big\|\langle hD_\xi\rangle^{\rho-s_2}\big[\chi, c(hD_\xi)\langle\xi\rangle\big]\langle hD_\xi\rangle_a^{s_2} w_j^{\pm}\big\|_{L^2(\mathbf{R}^n_\xi)}$$
$$= \mathcal{O}\big(e^{(3(1+a)\delta+3a\nu-\Sigma_1)/h}\big\|e^{g_1/h}w_j^{\pm}\big\|_{L^2(\mathbf{R}^n_\xi)}\big)$$

d'où, à l'aide du Corollaire 7.2 :

$$\big\|\langle hD_\xi\rangle^{\rho-s_2}\big[\chi, c(hD_\xi)\langle\xi\rangle\big]\langle hD_\xi\rangle_a^{s_2} w_j^{\pm}\big\|_{L^2(|\tau-\tau_0|\leqslant 2\delta)}$$
$$= \mathcal{O}\big(e^{(4(1+a)\delta+3a\nu-\Sigma_1)/h}\big). \tag{8.15}$$

Finalement, la zone $|\tau - \tau_0| \geqslant 2\delta$ peut s'étudier de manière très similaire, mais cette fois sans chercher à insérer le poids $e^{g_1/h}$. A la place, on utilise la Proposition 6.1 qui permet d'obtenir :

$$\begin{aligned}&\left\|\langle hD_\xi\rangle^{\rho-s_2}\left[\chi, c(hD_\xi)\langle\xi\rangle\right]\langle hD_\xi\rangle_a^{s_2} w_j^\pm\right\|_{L^2(|\tau-\tau_0|\geqslant 2\delta)}\\ &\quad = \mathcal{O}\left(e^{-C/h}\right) \qquad (8.16)\end{aligned}$$

où $C > 0$ peut être rendu arbitrairement grand si l'on choisi $\mu$ assez petit. Le lemme se déduit alors immédiatement de (8.15) et (8.16). □

Revenons maintenant à (8.7) et notons

$$r^\pm = (hD_t - Q)\chi^\pm\psi^\pm \qquad (8.17)$$

où

$$\chi^+ := \chi; \qquad \chi^- := 1 - \chi. \qquad (8.18)$$

D'après le lemme précédent, si $\varepsilon > 0$ est donné et si $\mu$ et $\delta$ sont choisis assez petits, on a donc :

$$\left\|\langle t\rangle^{s_1}\langle hD_\xi\rangle^{\rho-s_2} r^\pm\right\| = \mathcal{O}\left(e^{-(\Sigma_1-\varepsilon)/h}\right). \qquad (8.19)$$

On se propose maintenant de déduire de (8.19) que l'on a :

PROPOSITION 8.1. – *Pour tout $\varepsilon > 0$, si $\mu > 0$ et $\delta > 0$ sont choisis assez petits, alors pour tout $(s_1, s_2) \in \mathcal{A}(\mathrm{Min}(s - 1/2, \rho - s))$ on a* :

$$\left\|\langle t\rangle^{s_1}\langle hD_\xi\rangle^{-s_2}\psi^\pm\right\|_{L^2(\pm(\tau-\xi^2)\geqslant\pm\lambda_1)} = \mathcal{O}\left(e^{-(\Sigma_1-\varepsilon)/h}\right)$$

*uniformément par rapport à $h > 0$ assez petit et $\varphi_0^\pm \in H^2(\mathbf{R}^n)$ vérifiant $\|\varphi_0^\pm\|_{L^2} = 1$.*

*Preuve.* – On va traiter seulement le cas de $\psi^+$, celui de $\psi^-$ se faisant de manière similaire. On commence par montrer :

LEMME 8.2. – *La quantité $\|\chi\psi_2^+\|_{L^2(\mathbf{R}_\tau\times\mathbf{R}_\xi^n)}$ tend vers $0$ lorsque $t$ tend vers $-\infty$.*

*Preuve.* – Par définition de $W_+$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi_2^+(t) &= \Pi_2 e^{itP_0/h} f(P_0)\langle x\rangle^{-s}\begin{pmatrix}0\\ \varphi_0^+\end{pmatrix} + \varepsilon(t)\\ &= e^{it(-h^2\Delta_x+l_2)/h} f\left(-h^2\Delta_x + l_2\right)\langle x\rangle^{-s}\varphi_0^+ + \varepsilon(t)\end{aligned}$$

avec $\|\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \to 0$ lorsque $t \to -\infty$. D'autre part, on a par construction :

$$\chi_0\big(|\xi|\big) f\big(\xi^2 + l_2\big) = 0$$

pour tout $\xi \in \mathbf{R}^n$. En conséquence :

$$\chi_0\big(|hD_x|\big)\varphi_2^+(t) = \chi_0\big(|hD_x|\big)\varepsilon(t) =: \widetilde{\varepsilon}(t)$$

où à nouveau $\|\widetilde{\varepsilon}(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \to 0$ lorsque $t \to -\infty$. Remarquant alors que $\chi\psi_2^+ = G(\chi_0(|hD_x|)\varphi_2^+)$, le résultat s'en déduit par un calcul élémentaire. $\square$

Il résulte du lemme précédent et du Lemme 4.1 que l'on a :

$$\|\chi\psi^+\|_{L^2(\mathbf{R}_\tau \times \mathbf{R}^n_\xi)} \to 0 \quad (t \to -\infty). \tag{8.20}$$

D'autre part, du fait que $Q$ est auto-adjoint, on peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(e^{-itQ/h}\chi\psi^+\big) = \frac{i}{h} e^{-itQ/h}(hD_t - Q)\chi\psi^+ = \frac{i}{h} e^{-itQ/h} r^+$$

et donc, intégrant cette égalité entre $-\infty$ et $t \in \mathbf{R}$ arbitraire, on obtient en utilisant (8.20) :

$$\chi\psi^+(t,\tau,\xi) = \frac{i}{h}\int_{-\infty}^{t} e^{i(t-t')Q/h} r^+(t',\tau,\xi)\,dt' \tag{8.21}$$

et donc aussi :

$$\tilde{f}(Q)\chi\psi^+(t,\tau,\xi) = \frac{i}{h}\int_{-\infty}^{t} e^{i(t-t')Q/h}\tilde{f}(Q) r^+(t',\tau,\xi)\,dt'. \tag{8.22}$$

D'autre part, comme $\psi^+ = \tilde{f}(Q)\psi^+$, on a (en utilisant le calcul fonctionnel de [3]) :

$$\begin{aligned}
&\big(1 - \tilde{f}(Q)\big)\chi\psi^+ \\
&\quad = [\chi, \tilde{f}(Q)]\psi^+ = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbf{C}} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \bar{z}}(z,\bar{z})\big[\chi, (z-Q)^{-1}\big]\psi^+\,dz \wedge d\bar{z} \\
&\quad = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbf{C}} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \bar{z}}(z,\bar{z})(z-Q)^{-1}[\chi, Q](z-Q)^{-1}\psi^+\,dz \wedge d\bar{z}
\end{aligned} \tag{8.23}$$

où $\hat{f}$ désigne un prolongement presque-analytique de $\tilde{f}$ au sens de [13]. Observant alors que la fonction $\psi_z := |\operatorname{Im} z|(z - Q)^{-1}\psi^+$ est comme $\psi^+$ solution de $(hD_t - Q)\psi_z = 0$, et vérifie $\psi_z = \tilde{f}(Q)\psi_z$ ainsi que $\|\psi_z\|_{L^2(\mathbf{R}^n_\xi)} = \mathcal{O}(1)$, on peut voir que les résultats des Sections 5–7 obtenus pour $\psi^\pm$ se généralisent à $\psi_z$, et permettent notamment d'obtenir pour $(s_1, s_2) \in \mathcal{A}(s)$ :

$$\left\|\langle\xi\rangle^2(hD_t)^k(hD_\tau)^l\langle t\rangle^{s_1}\langle hD_\xi\rangle^{-s_2}e^{g_1/h}\psi_z\right\| = \mathcal{O}(e^{\varepsilon/h})$$

pour tout $\varepsilon > 0$. La preuve du Lemme 8.1 donne alors :

$$\left\|\langle t\rangle^{s_1}\langle hD_\xi\rangle^{\rho-s_2}[\chi, Q]\psi_z\right\| = \mathcal{O}(e^{-(\Sigma_1-\varepsilon)/h})$$

et donc, du fait que $|\operatorname{Im} z\,|\langle hD_\xi\rangle^{\rho-s_2}(z-Q)^{-1}\langle hD_\xi\rangle^{s_2-\rho}$ est uniformément borné :

$$\begin{aligned}&\left\|\langle t\rangle^{s_1}\langle hD_\xi\rangle^{\rho-s_2}(z-Q)^{-1}[\chi, Q](z-Q)^{-1}\psi^+\right\|\\ &\quad= \mathcal{O}\left(|\operatorname{Im} z|^{-2}e^{-(\Sigma_1-\varepsilon)/h}\right)\end{aligned}\tag{8.24}$$

uniformément pour $h$ assez petit, et localement uniformément par rapport à $z \in \mathbf{C}$. Insérant (8.24) dans (8.23), on obtient donc (en utilisant aussi le fait que $\partial_{\bar{z}}\hat{f} = \mathcal{O}(|\operatorname{Im} z|^\infty)$ lorsque $|\operatorname{Im} z| \to 0$) :

$$\left\|\langle t\rangle^{s_1}\langle hD_\xi\rangle^{\rho-s_2}\left(1-\tilde{f}(Q)\right)\chi\psi^+\right\| = \mathcal{O}\left(e^{-(\Sigma_1-\varepsilon)/h}\right).\tag{8.25}$$

Revenant maintenant à (8.22), on écrit pour tout $(s_1', s_2') \in \mathcal{A}(s)$ :

$$\begin{aligned}&\langle t\rangle^{s_1}\langle hD_\xi\rangle^{-s_2}\tilde{f}(Q)\chi\psi^+\\ &= \frac{i}{h}\langle t\rangle^{s_1}\int_{-\infty}^{t}\langle hD_\xi\rangle^{-s_2}e^{i(t-t')Q/h}\tilde{f}(Q)r^+(t',\tau,\xi)\,dt'\\ &= \frac{i}{h}\langle t\rangle^{s_1}\int_{-\infty}^{t}\langle t'\rangle^{-s_1'}\langle hD_\xi\rangle^{-s_2}e^{i(t-t')Q/h}\tilde{f}(Q)\langle hD_\xi\rangle^{s_2'-\rho}\\ &\quad\times\langle t'\rangle^{s_1'}\langle hD_\xi\rangle^{\rho-s_2'}r^+(t',\tau,\xi)\,dt'\end{aligned}$$

et donc, par Cauchy–Schwarz et en utilisant (8.19) :

$$\begin{aligned}&\left\|\langle t\rangle^{s_1}\langle hD_\xi\rangle^{-s_2}\tilde{f}(Q)\chi\psi^+\right\|^2_{L^2(\mathbf{R}_\tau\times\mathbf{R}^n_\xi)}\\ &\leqslant \frac{1}{h^2}\Bigg(\langle t\rangle^{s_1}\int_{-\infty}^{t}\langle t'\rangle^{-s_1'}\left\|\langle hD_\xi\rangle^{-s_2}e^{i(t-t')Q/h}\tilde{f}(Q)\langle hD_\xi\rangle^{s_2'-\rho}\right\|\end{aligned}$$

$$\times \langle t'\rangle^{s_1'} \big\| \langle hD_\xi\rangle^{\rho - s_2'} r^+(t',\tau,\xi)\big\|_{L^2(\mathbf{R}_\tau\times\mathbf{R}^n_\xi)}\, dt'\Bigg)^2$$

$$\leqslant C_\varepsilon e^{-2(\Sigma_1-\varepsilon)/h}\langle t\rangle^{2s_1}\int_{-\infty}^{t}\langle t'\rangle^{-2s_1'}\big\|\langle hD_\xi\rangle^{-s_2} e^{i(t-t')Q/h}$$

$$\times \tilde f(Q)\langle hD_\xi\rangle^{s_2'-\rho}\big\|^2\, dt' \tag{8.26}$$

où $\varepsilon > 0$ est arbitraire, et $C_\varepsilon > 0$ est une constante. Revenant ensuite aux variables $x$ de départ et utilisant (5.5) ainsi que le Lemme 2.4 de [6] (qui se généralise sans problème à notre cas matriciel), on obtient :

$$\begin{aligned}&\big\|\langle hD_\xi\rangle^{-s_2} e^{i(t-t')Q/h}\tilde f(Q)\langle hD_\xi\rangle^{s_2'-\rho}\big\|\\ &\quad= \big\|\langle x\rangle^{-s_2} e^{i(t-t')P/h}\tilde f(P)\langle x\rangle^{s_2'-\rho}\big\|\\ &\quad= \mathcal{O}\big(\langle t-t'\rangle^{\mathrm{Max}(-s_2,s_2'-\rho)}\big)\end{aligned}$$

à condition que $s_2'$ vérifie en outre :

$$s_2' - \rho \leqslant s_2. \tag{8.27}$$

Insérant cette estimation dans (8.26), on trouve alors :

$$\begin{aligned}&\big\|\langle t\rangle^{s_1}\langle hD_\xi\rangle^{-s_2}\tilde f(Q)\chi\psi^+\big\|^2_{L^2(\mathbf{R}_\tau\times\mathbf{R}^n_\xi)}\\ &\quad= \mathcal{O}\left(e^{-2(\Sigma_1-\varepsilon)/h}\langle t\rangle^{2s_1}\int_{-\infty}^{t}\langle t'\rangle^{-2s_1'}\langle t-t'\rangle^{2\mathrm{Max}(-s_2,s_2'-\rho)}\, dt'\right)\end{aligned} \tag{8.28}$$

uniformément per rapport à $t$ et $h$. Notons ici que le membre de droite sera fini à condition que $s_1'$ et $s_2'$ vérifient $s_1' + s_2 > \frac{1}{2}$ et $s_1' - s_2' + \rho > \frac{1}{2}$. Pour la suite, on supposera en fait que l'on a :

$$s_1' > \tfrac{1}{2} \quad \text{et} \quad s_2' \leqslant \rho \tag{8.29}$$

de telle sorte que (8.27) sera également automatiquement satisfaite. Dans ce cas, on peut écrire :

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{t}\langle t'\rangle^{-2s_1'}\langle t-t'\rangle^{2\mathrm{Max}(-s_2,s_2'-\rho)}\, dt'\\ &\quad\leqslant \Bigg(\int_{|t'-t|\geqslant|t|/2} + \int_{|t'-t|\leqslant|t|/2}\Bigg)\langle t'\rangle^{-2s_1'}\langle t-t'\rangle^{-2\mathrm{Min}(s_2,\rho-s_2')}\, dt'\end{aligned}$$

$$= \mathcal{O}\left(\langle t\rangle^{-2\mathrm{Min}(s_2,\rho-s_2')} + \langle t\rangle^{-2s_1'} \int_0^{|t|/2} (1+u)^{-2\mathrm{Min}(s_2,\rho-s_2')}\,du\right)$$

$$= \begin{cases} \mathcal{O}(\langle t\rangle^{-2\mathrm{Min}(s_2,\rho-s_2')} + \langle t\rangle^{-2s_1'}\ln\langle t\rangle) \\ \quad \text{si } 2\mathrm{Min}(s_2, \rho - s_2') \geqslant 1, \\ \mathcal{O}(\langle t\rangle^{-2\mathrm{Min}(s_2,\rho-s_2')} + \langle t\rangle^{1-2\mathrm{Min}(s_2,\rho-s_2')-2s_1'}) \\ \quad \text{si } 2\mathrm{Min}(s_2, \rho - s_2') < 1. \end{cases}$$

Pour optimiser cette estimation, il nous faut maintenant essayer de choisir $s_1'$ le plus grand possible, et $s_2'$ le plus petit possible. Tenant compte des contraintes (8.29) sur $(s_1', s_2') \in \mathcal{A}(s)$, on voit que si $\varepsilon_1 > 0$ et $\varepsilon_2 > 0$ sont choisis assez petits, on peut prendre :

$$\begin{cases} s_1' = s - \frac{1}{2} - \varepsilon_1; \\ s_2' = s_1' + \frac{1}{2} + \varepsilon_2 = s - \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \end{cases}$$

D'autre part, puisque $(s_1, s_2) \in \mathcal{A}(s - 1/2) \cap \mathcal{A}(\rho - s)$ on peut supposer sans perte de généralité que $s_2 < \mathrm{Min}(s - 1/2, \rho - s)$ et donc aussi, quite à diminuer un peu $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$, que $s_2 < \rho - s_2'$. Insérant l'estimation précédente dans (8.28), on obtient alors :

$$\begin{aligned} &\|\langle t\rangle^{s_1} \langle hD_\xi\rangle^{-s_2} \tilde{f}(Q)\chi\psi^+\|^2_{L^2(\mathbf{R}_\tau\times\mathbf{R}^n_\xi)} \\ &= \begin{cases} e^{-2(\Sigma_1-\varepsilon)/h}\mathcal{O}(\langle t\rangle^{2(s_1-s_2)} + \langle t\rangle^{2(s_1-s_1')}\ln\langle t\rangle) & \text{si } s_2 \geqslant 1/2, \\ e^{-2(\Sigma_1-\varepsilon)/h}\mathcal{O}(\langle t\rangle^{2(s_1-s_2)} + \langle t\rangle^{1+2(s_1-s_2-s_1')}) & \text{si } s_2 < 1/2. \end{cases} \end{aligned} \tag{8.30}$$

Par hypothèse, on a : $s_1 - s_2 < -1/2$ ainsi que $s_1 - s < -1$ et $s > 1$. Par suite, quitte à diminuer encore un peu $\varepsilon_1$, on aura :

$$\begin{aligned} &2(s_1 - s_1') = 2(s_1 - s) + 1 + \varepsilon_1 < -1; \\ &1 + 2(s_1 - s_2 - s_1') = 2(s_1 - s_2) - 2(s - 1) + 2\varepsilon_1 < -1. \end{aligned}$$

Intégrant alors (8.30) par rapport à $t \in \mathbf{R}$, on trouve finalement :

$$\|\langle t\rangle^{s_1} \langle hD_\xi\rangle^{-s_2} \tilde{f}(Q)\chi\psi^+\|^2_{L^2(\mathbf{R}^{n+2})} = \mathcal{O}(e^{-2(\Sigma_1-\varepsilon)/h}) \tag{8.31}$$

ce qui, avec (8.25), donne le résultat voulu. □

## 9. AMÉLIORATION DES ESTIMATIONS

Suivant la procédure de [1], on va maintenant réutiliser la Proposition 7.1 en tenant compte de l'information complémentaire apportée par la Proposition 8.1. On introduit le nouveau poids :

$$g_2^+(\tau,\xi) = f_2^+(\tau,\tau-\xi^2)\mathbf{1}_{[\inf V_1,+\infty[}(\tau)$$

avec

$$\begin{aligned} f_2^+(\tau,\lambda) = &\ \mathbf{1}_{[\sup V_2,\lambda_1]}(\lambda) f_1(\tau,\lambda) + \mathbf{1}_{[\lambda_1,\inf V_1]}(\lambda) \\ &\times \operatorname{Min}\left\{ \Sigma_1 + \int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{\kappa(\theta)}{2\sqrt{\tau-\theta}}\,d\theta;\ \Sigma_1 + \int_{\lambda}^{\inf V_1} \frac{\kappa(\theta)}{2\sqrt{\tau-\theta}}\,d\theta \right\} \\ &+ \mathbf{1}_{[\inf V_1,+\infty]}(\lambda)\Sigma_1. \end{aligned}$$

$f_2^+(\tau_0,\lambda)$ est donc une fonction continue par rapport à $\lambda$ sur $\mathbf{R}$, et atteint son maximum en un point $\lambda_2^+ \in ]\lambda_1, \inf V_1[$ tel que :

$$\Sigma_2 := f_2^+(\lambda_2^+) = \tfrac{3}{4}\Sigma_0.$$

De plus, $g_2^+$ peut être approchée en norme $L^\infty$ par une fonction $g \in C^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$ vérifiant (7.4) ainsi que :

$$g\big|_{\{\tau-\xi^2 \geqslant \inf V_1 - 2\varepsilon;\, |\tau-\tau_0| \leqslant 2\delta\}} = \Sigma_1 - \varepsilon_1$$

avec $\varepsilon_1 > 0$ arbitrairement petit. Du fait que $\mathcal{A}(\operatorname{Min}(s-1/2,\rho-s)) \subset \mathcal{A}(s)$, on peut appliquer la Proposition 7.1 avec cette nouvelle fonction $g$ et avec $(s_1,s_2) \in \mathcal{A}(\operatorname{Min}(s-1/2,\rho-s))$, et on obtient alors en tenant compte du résultat de la Proposition 8.1 :

$$\left\| \langle\xi\rangle^2 (hD_t)^k (hD_\tau)^l \langle t\rangle^{s_1} \langle hD_\xi\rangle^{-s_2} e^{g_2^+/h} \psi^+ \right\| = \mathcal{O}(e^{\varepsilon/h}) \tag{9.1}$$

pour tout $k,l \in \mathbf{N}$, et en choisissant $\delta$ et $\mu$ assez petits en fonction de $\varepsilon > 0$ arbitraire. De manière similaire, on obtient pour $\psi^-$ :

$$\left\| \langle\xi\rangle^2 (hD_t)^k (hD_\tau)^l \langle t\rangle^{s_1} \langle hD_\xi\rangle^{-s_2} e^{g_2^-/h} \psi^- \right\| = \mathcal{O}(e^{\varepsilon/h}) \tag{9.2}$$

où $g_2^-(\tau,\xi) = f_2^-(\tau,\tau-\xi^2)\mathbf{1}_{[\inf V_1,+\infty[}(\tau)$ avec :

$$f_2^-(\tau,\lambda) = \mathbf{1}_{]-\infty,\sup V_2]}(\lambda)\Sigma_1 + \mathbf{1}_{[\sup V_2,\lambda_1]}(\lambda)$$

$$\times \operatorname{Min}\left\{ \Sigma_1 + \int_{\sup V_2}^{\lambda} \frac{\kappa(\theta)}{2\sqrt{\tau-\theta}} d\theta;\ \Sigma_1 + \int_{\lambda}^{\lambda_1} \frac{\kappa(\theta)}{2\sqrt{\tau-\theta}} d\theta \right\}$$
$$+ \mathbf{1}_{[\lambda_1, \inf V_1]}(\lambda) f_1(\tau, \lambda).$$

En particulier, $f_2^-(\tau_0, \lambda)$ admet également comme maximum $\Sigma_2$, qu'elle atteint en un point $\lambda_2^- \in ]\sup V_2, \lambda_1[$. Comme pour le Lemme 8.1, ces estimations permettent ensuite d'obtenir :

$$\| \langle t \rangle^{s_1} \langle h D_\xi \rangle^{\rho - s_2} [\chi_2^\pm, Q] \psi^\pm \| = \mathcal{O}(e^{-(\Sigma_2 - \varepsilon)/h})$$

pour tout $(s_1, s_2) \in \mathcal{A}(\operatorname{Min}(s - 1/2, \rho - s))$ et pour tout $\varepsilon > 0$, si $\mu > 0$ et $\delta > 0$ sont choisis suffisamment petits. Ici, $\chi_2^\pm$ est une fonction de troncature construite sur le même modèle que $\chi^\pm$ (cf. (8.18) et (8.3)–(8.6)) mais en remplaçant $\lambda_1$ par $\lambda_2^\pm$. A ce point, la preuve de la Proposition 8.1 pourra aussi être généralisée, à condition que l'on ait $\operatorname{Min}(s - 1/2, \rho - s) > 1$, c'est à dire :

$$\frac{3}{2} < s < \rho - 1.$$

ce qui exige aussi que $\rho > 5/2$. Dans ce cas, on obtient :

$$\| \langle t \rangle^{s_1} \langle h D_\xi \rangle^{-s_2} \psi^\pm \|_{L^2(\pm(\tau - \xi^2) \geqslant \pm \lambda_2^\pm)} = \mathcal{O}(e^{-(\Sigma_2 - \varepsilon)/h})$$

pour tout $(s_1, s_2) \in \mathcal{A}(\operatorname{Min}(s - 1, \rho - s - 1/2))$. Continuant cette procédure, on peut ainsi construire deux suites de fonctions continues $(g_j^\pm(\tau, \xi))_{j \geqslant 2}$ et deux suites de réels $(\lambda_j^+)_{j \geqslant 2}$ croissante et $(\lambda_j^-)_{j \geqslant 2}$ décroissante vérifiant :

$$\begin{aligned}
& g_j^+(\tau_0, \xi) + g_j^-(\tau_0, \xi) = \Sigma_0 \quad \text{pour } \tau_0 - \xi^2 \in [\lambda_j^-, \lambda_j^+], \\
& g_j^+(\tau_0, \xi) \geqslant \Sigma_{j-1} := \sum_{k=1}^{j-1} 2^{-k} \Sigma_0 \quad \text{pour } \tau_0 - \xi^2 \in [\lambda_j^+, +\infty[, \\
& g_j^-(\tau_0, \xi) \geqslant \Sigma_{j-1} \quad \text{pour } \tau_0 - \xi^2 \in ]-\infty, \lambda_j^-]
\end{aligned} \tag{9.3}$$

et telles que, si $j = 2$ ou si $j \geqslant 3$ vérifie :

$$s - \frac{j-2}{2} > 1 \quad \text{et} \quad \rho - s - \frac{j-3}{2} > 1$$

alors, pour tout $(s_1, s_2) \in \mathcal{A}(\mathrm{Min}(s - (j-1)/2, \rho - s - (j-2)/2))$ et pour tout $\varepsilon > 0$, si $\delta$ et $\mu$ sont choisis assez petits :

$$\|\langle t\rangle^{s_1} \langle hD_\xi\rangle^{-s_2} e^{g_j^\pm/h} \psi^\pm\| = \mathcal{O}(e^{\varepsilon/h}). \tag{9.4}$$

En particulier, on voit qu'avec la définition (2.13) l'estimation précédente est vraie pour $j = N(\rho)$ et

$$\frac{N(\rho)}{2} < s < \rho + \frac{1}{2} - \frac{N(\rho)}{2}$$

dans le cas $\rho > 5/2$, et pour $j = N(\rho)$ et $1 < s < \rho$ dans le cas $\rho \leqslant 5/2$. On obtient alors entre autre :

$$\|\langle t\rangle^{-1} e^{g_{N(\rho)}^\pm/h} \psi^\pm\| = \mathcal{O}(e^{\varepsilon/h}). \tag{9.5}$$

## 10. FIN DE LA PREUVE DU THÉORÈME 2.1

On revient maintenant aux formules (3.3) et (4.3) qui, du fait de l'indépendance de ces quantités par rapport à $t$, donnent aussi :

$$A(\varphi_0^-, \varphi_0^+) = c_0 \langle \langle t\rangle^{-1} \psi^-, \langle t\rangle^{-1} \psi^+ \rangle_{L^2(\mathbf{R}^{n+2}) \oplus L^2(\mathbf{R}^{n+2})}$$

avec

$$c_0 = \left( \int_{\mathbf{R}} \langle t\rangle^{-2}\, dt \right)^{-1} = \pi^{-1}.$$

Utilisant alors (9.5) ainsi que la Proposition 6.1, on trouve par Cauchy–Schwarz :

$$A(\varphi_0^-, \varphi_0^+) = \mathcal{O}(e^{-(\Sigma - \varepsilon)/h})$$

pour tout $\varepsilon > 0$, et avec

$$\Sigma = \mathrm{Min}\Big\{ \sup_{|\tau - \tau_0| \leqslant 2\delta} (g_{N(\rho)}^- + g_{N(\rho)}^+), C \Big\}$$

où $C > 0$ peut être prise arbitrairement grande si on a choisi $\mu$ assez petit. En particulier, utilisant (9.3), on voit qu'on a alors :

$$\Sigma \geqslant \Sigma_{N(\rho)-1} - 2C_\rho \delta$$

où

$$C_\rho = \sup_{|\tau - \tau_0| \leqslant 2\delta} \left| \partial_\tau \left( g^-_{N(\rho)} + g^+_{N(\rho)} \right) \right|$$

est indépendant de $\varepsilon$ et $\delta$.

Le Théorème 2.1 s'en déduit alors immédiatement en remarquant que $\Sigma_{N(\rho)-1} = \Sigma(\rho)$.

## 11. UNE GÉNÉRALISATION

Comme cela était le cas dans [1], on peut ici aussi essayer de généraliser le résultat précédent lorsque l'hypothèse (2.8) est remplacée par :

$$\inf_{x \in \mathbf{R}^n} \big( V_1(x) - V_2(x) \big) > 0. \tag{11.1}$$

Pour cela, il faut tenir davantage compte du comportement des fonctions relativement à la variable $x$, par exemple en remplaçant la transformation $G$ par la transformation de FBI globale $T$ définie par :

$$\begin{aligned} &Tu(t, x, \tau, \xi) \\ &\quad = C \int e^{i[(t-s)\tau + (x-y)\xi]/h - \mu[(t-s)^2 + (x-y)^2]/2h} u(s, y)\, ds\, dy \end{aligned}$$

avec $C = 2^{-(n+1)/2}(\pi h)^{-3(n+1)/4}$. Un analogue du Corollaire 7.2 peut alors être prouvé en prenant pour $g_1$ n'importe quelle fonction $C^\infty$ de $(t, x, \tau, \xi)$ positive ou nulle vérifiant :

$$\left\{ \begin{aligned} &\operatorname{Supp} g_1 \subset \{ |\tau - \xi^2 - \tfrac{V_1(t,x) + V_2(t,x)}{2}| < \tfrac{\inf(V_1 - V_2)}{2} - \varepsilon; \\ &\qquad\qquad |\tau - \tau_0| \leqslant 2\delta \}; \\ &|\tau + i\mu\tilde{\partial}_1 g_1 - (\xi + i\mu\tilde{\partial}_2 g_1)^2 - V_j(x - \tilde{\partial}_2 g_1)| \geqslant \tfrac{1}{C_\varepsilon} \quad \text{sur } \operatorname{Supp} g_1 \end{aligned} \right. \tag{11.2}$$

où l'on a noté :

$$\tilde{\partial}_1 = \frac{1}{\mu}\partial_t + i\partial_\tau; \qquad \tilde{\partial}_2 = \frac{1}{\mu}\partial_x + i\partial_\xi.$$

Notant ensuite $\Sigma_1 := \inf_{x \in \mathbf{R}^n} \sup_{(t,\tau,\xi) \in \mathbf{R}^{n+2}} g_1(t, x, \tau, \xi)$, l'analogue des estimations (9.1) et (9.2) pourra également être obtenu en prenant pour $g_2^\pm$ n'importe quelle fonction positive ou nulle telle que :

$$
\begin{cases}
g_2^{\pm} = 0 \quad \text{sur } \{\pm(\tau - \xi^2 - \frac{V_1(x)+V_2(x)}{2}) \leqslant -\frac{\inf(V_1-V_2)}{2} + \varepsilon; \\
\qquad\qquad |\tau - \tau_0| \leqslant 2\delta\}; \\
g_2^{\pm} = \Sigma_1 \quad \text{sur } \{\pm(\tau - \xi^2 - \frac{V_1(x)+V_2(x)}{2}) \geqslant \frac{\inf(V_1-V_2)}{2} - \varepsilon; \\
\qquad\qquad |\tau - \tau_0| \leqslant 2\delta\}; \\
\mathrm{Supp}\nabla g_2^{\pm} \subset \{|\tau - \xi^2 - \frac{V_1(t,x)+V_2(t,x)}{2}| < \frac{\inf(V_1-V_2)}{2} - \varepsilon; \\
\qquad\qquad |\tau - \tau_0| \leqslant 2\delta\}; \\
|\tau + i\mu\tilde{\partial}_1 g_2^{\pm} - (\xi + i\mu\tilde{\partial}_2 g_2^{\pm})^2 - V_j(x - \tilde{\partial}_2 g_2^{\pm})| \geqslant \frac{1}{C_\varepsilon}; \\
\quad \text{sur Supp}\,\nabla g_2^{\pm}.
\end{cases}
\tag{11.3}
$$

On peut ensuite continuer de manière naturelle cette construction, et obtenir ainsi pour tout $j \leqslant N(\rho)$ des conditions sur les fonctions $g_j^{\pm}$ qui permettent d'avoir un analogue de l'estimation (9.4). Optimisant ensuite comme dans [1] le choix de $\mu$ et de ces fonctions $g_j^{\pm}$, le résultat du Theorème 2.1 sera vrai avec $\Sigma(\rho)$ remplacé par $\widetilde{\Sigma}(\rho) = \inf_{\mathbf{R}^{2n+2}}(g_{N(\rho)}^{+} + g_{N(\rho)}^{-})$.

## RÉFÉRENCES


[1] M. BENCHAOU, Estimations de diffusion pour un opérateur de Klein–Gordon dépendant du temps, *Bull. Soc. Math. de France* 126 (1998) 273–294.

[2] C. GÉRARD and A. MARTINEZ, Principe d'absorption limite pour des opérateurs de Schrödinger à longue porté, *C. R. Acad. Sci. Paris* 906 I (1988) 121–123.

[3] B. HELFFER and J. SJÖSTRAND, Equation de Schrödinger avec champ magnétique et équation de Harper, Lecture Notes in Physics, vol. 345, Springer, Berlin, 1989, 118–197.

[4] H. ISOZAKI, Decay rates of scattering states for Schrödinger operators, *J. Math. Kyoto Univ.* 26 (1986) 595–603.

[5] T. JECKO, Sections efficaces totales d'une molécule diatomique dans l'approximation de Born–Oppenheimer, Thèse de Doctorat, Université de Nantes, 1996.

[6] A. JENSEN and S. NAKAMURA, Mapping properties for wave and scattering operators for two-body Schrödinger operators, *Lett. Math. Phys.* 24 (1992) 295–305.

[7] K. JUNG, Adiabatik und Semiklassik bei Regularität vom Gevrey-Typ, Ph.D. Thesis, Technische Universität Berlin, 1997.

[8] M. KLEIN, A. MARTINEZ and X.P. WANG, On the Born–Oppenheimer approximation of wave operators, *Comm. Math. Phys.* 152 (1993).

[9] M. KLEIN, A. MARTINEZ and X.P. WANG, On the Born–Oppenheimer approximation of wave operators II: Singular potentials, *J. Math. Phys.* 38 (3) (1997) 1373–1396.

[10] M. KLEIN, A. MARTINEZ, R. SEILER and X.P. WANG, On the Born–Oppenheimer expansion for polyatomic molecules, *Comm. Math. Phys.* 143 (1992).
[11] A. MARTINEZ, Estimates on complex interactions in phase space, *Math. Nachr.* 167 (1994) 203–254.
[12] A. MARTINEZ, Precise exponential estimates in adiabatic theory, *J. Math. Phys.* 35 (8) (1994) 3889–3915.
[13] A. MELIN and J. SJÖSTRAND, Fourier integral operators with complex-valued phase functions, Lecture Notes in Math., vol. 459, Springer, Berlin, 1975, 120–223.
[14] E. MOURRE, Absence of singular continuous spectrum for certain self-adjoint operators, *Comm. Math. Phys.* 78 (1981) 391–408.
[15] S. NAKAMURA, On an example of phase-space tunneling, *Ann. Inst. H. Poincaré*, 63 (2) (1995).
[16] S. NAKAMURA, On Martinez' method of phase space tunneling, *Rev. Math. Phys.* 7 (3) (1995) 431–441.
[17] S. NAKAMURA, Tunneling effects in momentum space and scattering, in: M. Ikawa (Ed.), *Spectral and Scattering Theory*, Lecture Notes in Pure Appl. Math., vol. 161, Marcel Decker, New York, 1994.
[18] M. REED and B. SIMON, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Academic Press, 1972.
[19] D. ROBERT, *Autour de l'Approximation Semi-Classique*, Birkhäuser, 1987.
[20] J. SJÖSTRAND, Singularités analytiques microlocales, *Astérisque* 95 (1982).
[21] X.P. WANG, Time-decay of scattering solutions and resolvent estimates for semiclassical Schrödinger operators, *J. Differential Equations* 71 (1988) 348–395.